Introducción a las álgebras de Lie

Ana González

IMERL, Facultad de Ingeniería

20 de Diciembre de 2017
6to Coloquio Uruguayo de Matemática

Índice

Índice

1. Conceptos básicos de álgebras de Lie.
2. Clasificación en dimensiones bajas.
3. Aplicaciones a Economía y Finanzas.

Índice

Definición

Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo. Decimos que $\mathfrak{L}$ es un **álgebra de Lie** *sobre $\mathbb{k}$ si es un $\mathbb{k}$-espacio vectorial y admite un producto (bilineal), llamado corchete de Lie*

$$\begin{array}{rccc} [\,,\,]: & \mathfrak{L}\times\mathfrak{L} & \to & \mathfrak{L} \\ & (x,y) & \mapsto & [x,y] \end{array}$$

Que satisface las siguientes propiedades

1. $[x,x]=0,\ \forall x\in\mathfrak{L}$.
2. $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0,\ \forall x,y\in\mathfrak{L}$. *Esta propiedad se conoce como* **condición de Jacobi**.

Un álgebra de Lie se dice **abeliana** *si $\forall x,y\in\mathfrak{L}$ se tiene que el corchete de Lie*

$$[x,y]=0.$$

Definición

Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo. Decimos que $\mathfrak{L}$ es un **álgebra de Lie** *sobre $\mathbb{k}$ si es un $\mathbb{k}$-espacio vectorial y admite un producto (bilineal), llamado corchete de Lie*

$$\begin{array}{rccc} [\,,\,]: & \mathfrak{L}\times\mathfrak{L} & \to & \mathfrak{L} \\ & (x,y) & \mapsto & [x,y] \end{array}$$

Que satisface las siguientes propiedades

1. $[x,x]=0,\ \forall x\in\mathfrak{L}$.
2. $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0,\ \forall x,y\in\mathfrak{L}$. *Esta propiedad se conoce como* **condición de Jacobi**.

Un álgebra de Lie se dice **abeliana** *si $\forall x,y\in\mathfrak{L}$ se tiene que el corchete de Lie*

$$[x,y]=0.$$

Definición

Sea $\mathbb{k}$ *un cuerpo.Decimos que* $\mathfrak{L}$ *es un* **álgebra de Lie** *sobre* $\mathbb{k}$ *si es un* $\mathbb{k}$*-espacio vectorial y admite un producto (bilineal), llamado corchete de Lie*

$$\begin{array}{rccc} [\,,\,]: & \mathfrak{L}\times\mathfrak{L} & \to & \mathfrak{L} \\ & (x,y) & \mapsto & [x,y] \end{array}$$

Que satisface las siguientes propiedades

1. $[x,x]=0,\ \forall x\in\mathfrak{L}.$
2. $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0,\ \forall x,y\in\mathfrak{L}.$ *Esta propiedad se conoce como* **condición de Jacobi**.

Un álgebra de Lie se dice **abeliana** *si* $\forall x,y\in\mathfrak{L}$ *se tiene que el corchete de Lie*

$$[x,y]=0.$$

Definición

Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo. Decimos que $\mathfrak{L}$ es un **álgebra de Lie** *sobre $\mathbb{k}$ si es un $\mathbb{k}$-espacio vectorial y admite un producto (bilineal), llamado corchete de Lie*

$$\begin{array}{rccc} [\,,\,]: & \mathfrak{L}\times\mathfrak{L} & \to & \mathfrak{L} \\ & (x,y) & \mapsto & [x,y] \end{array}$$

Que satisface las siguientes propiedades

1. $[x,x]=0,\ \forall x\in\mathfrak{L}$.
2. $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0,\ \forall x,y\in\mathfrak{L}$. *Esta propiedad se conoce como* **condición de Jacobi**.

Un álgebra de Lie se dice **abeliana** *si $\forall x,y\in\mathfrak{L}$ se tiene que el corchete de Lie*

$$[x,y]=0.$$

Conceptos básicos de álgebras de Lie

Definición

Sea $\mathbb{k}$ *un cuerpo.Decimos que* $\mathfrak{L}$ *es un* **álgebra de Lie** *sobre* $\mathbb{k}$ *si es un* $\mathbb{k}$*-espacio vectorial y admite un producto (bilineal), llamado corchete de Lie*

$$[\,,\,]: \begin{array}{ccc} \mathfrak{L}\times\mathfrak{L} & \to & \mathfrak{L} \\ (x,y) & \mapsto & [x,y] \end{array}$$

Que satisface las siguientes propiedades

1. $[x,x]=0$, $\forall x\in\mathfrak{L}$.
2. $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$, $\forall x,y\in\mathfrak{L}$. *Esta propiedad se conoce como* **condición de Jacobi**.

Un álgebra de Lie se dice **abeliana** *si* $\forall x,y\in\mathfrak{L}$ *se tiene que el corchete de Lie*

$$[x,y]=0.$$

Definición

Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo. Decimos que $\mathfrak{L}$ es un **álgebra de Lie** *sobre $\mathbb{k}$ si es un $\mathbb{k}$-espacio vectorial y admite un producto (bilineal), llamado corchete de Lie*

$$\begin{array}{rccc} [\,,\,]: & \mathfrak{L}\times\mathfrak{L} & \to & \mathfrak{L} \\ & (x,y) & \mapsto & [x,y] \end{array}$$

Que satisface las siguientes propiedades

1. $[x,x]=0,\ \forall x\in\mathfrak{L}$.
2. $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0,\ \forall x,y\in\mathfrak{L}$. *Esta propiedad se conoce como* **condición de Jacobi**.

Un álgebra de Lie se dice **abeliana** *si $\forall x,y\in\mathfrak{L}$ se tiene que el corchete de Lie*

$$[x,y]=0.$$

Observación:

$$0 = [x+y, x+y] = [x,x] + [x,y] + [y,x] + [y,y] = [x,y] + [y,x] \Rightarrow$$

$$[x,y] = -[y,x].$$

Entonces, la propiedad (1) puede sustituirse por la siguiente propiedad:
(1') $[x,y] = -[y,x], \ \forall x, y \in \mathfrak{L}$.

Observación:

Supongamos que el álgebra es de dimensión finita, consideremos $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de la misma (como espacio vectorial sobre $\Bbbk$), todo elemento $x \in \mathfrak{L}$ puede escribirse como

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \quad \xi_i \in \Bbbk.$$

Observación:

$$0 = [x+y, x+y] = [x,x]+[x,y]+[y,x]+[y,y] = [x,y]+[y,x] \Rightarrow$$

$$[x,y] = -[y,x].$$

Entonces, la propiedad (1) puede sustituirse por la siguiente propiedad:
(1') $[x,y] = -[y,x]$, $\forall x, y \in \mathfrak{L}$.

Observación:

Supongamos que el álgebra es de dimensión finita, consideremos $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de la misma (como espacio vectorial sobre $\mathbb{k}$), todo elemento $x \in \mathfrak{L}$ puede escribirse como

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \quad \xi_i \in \mathbb{k}.$$

Observación:

$$0 = [x+y, x+y] = [x,x]+[x,y]+[y,x]+[y,y] = [x,y]+[y,x] \Rightarrow$$

$$[x,y] = -[y,x].$$

Entonces, la propiedad (1) puede sustituirse por la siguiente propiedad:
(1') $[x,y] = -[y,x]$, $\forall x, y \in \mathfrak{L}$.

Observación:

Supongamos que el álgebra es de dimensión finita, consideremos $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de la misma (como espacio vectorial sobre $\mathbb{k}$), todo elemento $x \in \mathfrak{L}$ puede escribirse como

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \quad \xi_i \in \mathbb{k}.$$

Observación:

Para probar que un espacio vectorial es un álgebra de Lie basta verificar que los elementos de la base satisfacen las condiciones de Lie.

Veamos sólo la condición (1).

$$[x,x]=\left[\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i,\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j\right]=\sum_{i,j=1}^{n}\xi_i\xi_j\left[e_i,e_j\right]=0$$

$$\Rightarrow [x,x]=0,\ \forall x\in\mathfrak{L}.$$

Observación:

Para probar que un espacio vectorial es un álgebra de Lie basta verificar que los elementos de la base satisfacen las condiciones de Lie.
Veamos sólo la condición (1).

$$[x,x] = \left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right] = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \xi_j \left[e_i, e_j\right] = 0$$

$$\Rightarrow [x,x] = 0, \ \forall x \in \mathfrak{L}.$$

Observación:

Para probar que un espacio vectorial es un álgebra de Lie basta verificar que los elementos de la base satisfacen las condiciones de Lie.

Veamos sólo la condición (1).

$$[x, x] = \left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j \right] = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \xi_j \left[e_i, e_j \right] = 0$$

$$\Rightarrow [x, x] = 0, \ \forall x \in \mathfrak{L}.$$

Definición (Estructura constante)

Si $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie sobre $\Bbbk$ con base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ entonces $[\,,\,]$ queda completamente determinado si conocemos los productos $[e_i, e_j]$.

Definamos escalares $a_{ij}^k \in \Bbbk$ tales que

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k e_k.$$

Los escalares a_{ij}^k se llaman **estructura constante** *de $\mathfrak{L}$ con respecto a la base $\mathcal{B}$.Diferentes bases pueden dar, en general, diferentes estructuras constantes.*

Por las propiedades (1) y (1') es suficiente conocer la estructura constante a_{ij}^k, $1 \leq i < j \leq n$ para tener determinada la estructura de Lie sobre $\mathfrak{L}$.

Definición (Estructura constante)

Si $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie sobre $\mathbb{k}$ con base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ entonces $[\,,\,]$ queda completamente determinado si conocemos los productos $[e_i, e_j]$.
Definamos escalares $a_{ij}^k \in \mathbb{k}$ tales que

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k e_k.$$

Los escalares a_{ij}^k se llaman **estructura constante** *de $\mathfrak{L}$ con respecto a la base $\mathcal{B}$.Diferentes bases pueden dar, en general, diferentes estructuras constantes.*

Por las propiedades (1) y (1') es suficiente conocer la estructura constante a_{ij}^k, $1 \leq i < j \leq n$ para tener determinada la estructura de Lie sobre $\mathfrak{L}$.

Definición (Estructura constante)

Si $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie sobre $\Bbbk$ con base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ entonces $[\,,\,]$ queda completamente determinado si conocemos los productos $[e_i, e_j]$.
Definamos escalares $a_{ij}^k \in \Bbbk$ tales que

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k e_k.$$

Los escalares a_{ij}^k se llaman **estructura constante** *de $\mathfrak{L}$ con respecto a la base $\mathcal{B}$. Diferentes bases pueden dar, en general, diferentes estructuras constantes.*

Por las propiedades (1) y (1') es suficiente conocer la estructura constante a_{ij}^k, $1 \le i < j \le n$ para tener determinada la estructura de Lie sobre $\mathfrak{L}$.

Definición (Estructura constante)

Si $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie sobre $\mathbb{k}$ con base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ entonces $[\,,\,]$ queda completamente determinado si conocemos los productos $[e_i, e_j]$.
Definamos escalares $a_{ij}^k \in \mathbb{k}$ tales que

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k e_k.$$

Los escalares a_{ij}^k se llaman **estructura constante** *de $\mathfrak{L}$ con respecto a la base $\mathcal{B}$.Diferentes bases pueden dar, en general, diferentes estructuras constantes.*

Por las propiedades (1) y (1') es suficiente conocer la estructura constante a_{ij}^k, $1 \leq i < j \leq n$ para tener determinada la estructura de Lie sobre $\mathfrak{L}$.

Definición (Estructura constante)

Si $\mathfrak{L}$ *es un álgebra de Lie sobre* $\mathbb{k}$ *con base* $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ *entonces* $[\,,\,]$ *queda completamente determinado si conocemos los productos* $[e_i, e_j]$*.*
Definamos escalares $a_{ij}^k \in \mathbb{k}$ *tales que*

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k e_k.$$

Los escalares a_{ij}^k *se llaman* **estructura constante** *de* $\mathfrak{L}$ *con respecto a la base* $\mathcal{B}$*.Diferentes bases pueden dar, en general, diferentes estructuras constantes.*

Por las propiedades (1) y (1') es suficiente conocer la estructura constante a_{ij}^k, $1 \leq i < j \leq n$ para tener determinada la estructura de Lie sobre $\mathfrak{L}$.

Ejemplo (1)

Consideremos el cuerpo de los reales $\mathbb{R}$ *y el espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$ *sobre* $\mathbb{R}$*. Observemos que el producto vectorial*

$$\begin{array}{rccc} \wedge : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \mapsto & x \wedge y \end{array}$$

define una estructura de Lie sobre $\mathbb{R}^3$*.*

Ejemplo (2)

Cualquier espacio de vectores V *tiene un corchete de Lie dado por*

$$[x, y] = 0, \quad \forall x, y \in V.$$

Esta es una estructura de Lie abeliana sobre V*.*
En particular el cuerpo puede considerarse como un álgebra de Lie de dimensioón 1 con este corchete.

Ejemplo (1)

Consideremos el cuerpo de los reales $\mathbb{R}$ *y el espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$ *sobre* $\mathbb{R}$. *Observemos que el producto vectorial*

$$\begin{array}{rccc} \wedge : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \mapsto & x \wedge y \end{array}$$

define una estructura de Lie sobre $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo (2)

Cualquier espacio de vectores V *tiene un corchete de Lie dado por*

$$[x, y] = 0, \quad \forall x, y \in V.$$

Esta es una estructura de Lie abeliana sobre V.

En particular el cuerpo puede considerarse como un álgebra de Lie de dimensioón 1 con este corchete.

Ejemplo (1)

Consideremos el cuerpo de los reales $\mathbb{R}$ *y el espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$ *sobre* $\mathbb{R}$. *Observemos que el producto vectorial*

$$\begin{array}{rccc} \wedge : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \mapsto & x \wedge y \end{array}$$

define una estructura de Lie sobre $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo (2)

Cualquier espacio de vectores V *tiene un corchete de Lie dado por*

$$[x, y] = 0, \quad \forall x, y \in V.$$

Esta es una estructura de Lie abeliana sobre V.
En particular el cuerpo puede considerarse como un álgebra de Lie de dimensioón 1 con este corchete.

Ejemplo (3)

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\Bbbk$ y

$$\mathfrak{gl}(V) = \{T : V \to V : \ T \textit{ lineal}\}$$

Podemos definir un corchete que le da estructura de álgebra de Lie.

$$\begin{array}{rccc} [\,,\,]: & \mathfrak{gl}(V) \times \mathfrak{gl}(V) & \to & \mathfrak{gl}(V) \\ & (T, S) & \mapsto & T \circ S - S \circ T \end{array}$$

Ejemplo (4)

Sea $\mathfrak{gl}(n, \Bbbk)$ matrices cuadradas sobre $\Bbbk$. Este espacio vectorial tiene estructura de álgebra de Lie definiendo en corchete como

$$\begin{array}{rccc} [\,,\,]: & \mathfrak{gl}(n,\Bbbk) \times \mathfrak{gl}(n,\Bbbk) & \to & \mathfrak{gl}(n,\Bbbk) \\ & (M, N) & \mapsto & MN - NM \end{array}$$

Ejemplo (3)

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\Bbbk$ y

$$\mathfrak{gl}(V) = \{T : V \to V : \ T \text{ lineal}\}$$

Podemos definir un corchete que le da estructura de álgebra de Lie.

$$\begin{array}{rccc} [\,,\,]: & \mathfrak{gl}(V) \times \mathfrak{gl}(V) & \to & \mathfrak{gl}(V) \\ & (T, S) & \mapsto & T \circ S - S \circ T \end{array}$$

Ejemplo (4)

Sea $\mathfrak{gl}(n, \Bbbk)$ matrices cuadradas sobre $\Bbbk$. Este espacio vectorial tiene estructura de álgebra de Lie definiendo en corchete como

$$\begin{array}{rccc} [\,,\,]: & \mathfrak{gl}(n,\Bbbk) \times \mathfrak{gl}(n,\Bbbk) & \to & \mathfrak{gl}(n,\Bbbk) \\ & (M, N) & \mapsto & MN - NM \end{array}$$

Ejemplo (3)

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{k}$ y

$$\mathfrak{gl}(V) = \{T : V \to V : \ T \text{ lineal}\}$$

Podemos definir un corchete que le da estructura de álgebra de Lie.

$$\begin{array}{rccc} [\,,\,]: & \mathfrak{gl}(V) \times \mathfrak{gl}(V) & \to & \mathfrak{gl}(V) \\ & (T, S) & \mapsto & T \circ S - S \circ T \end{array}$$

Ejemplo (4)

Sea $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ *matrices cuadradas sobre* $\mathbb{k}$*. Este espacio vectorial tiene estructura de álgebra de Lie definiendo en corchete como*

$$\begin{array}{rccc} [\,,\,]: & \mathfrak{gl}(n,\mathbb{k}) \times \mathfrak{gl}(n,\mathbb{k}) & \to & \mathfrak{gl}(n,\mathbb{k}) \\ & (M, N) & \mapsto & MN - NM \end{array}$$

Ejemplo (3)

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{k}$ y

$$\mathfrak{gl}(V) = \{T : V \to V : \ T \text{ lineal}\}$$

Podemos definir un corchete que le da estructura de álgebra de Lie.

$$\begin{array}{rccc} [\,,\,]: & \mathfrak{gl}(V) \times \mathfrak{gl}(V) & \to & \mathfrak{gl}(V) \\ & (T, S) & \mapsto & T \circ S - S \circ T \end{array}$$

Ejemplo (4)

Sea $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ matrices cuadradas sobre $\mathbb{k}$. Este espacio vectorial tiene estructura de álgebra de Lie definiendo en corchete como

$$\begin{array}{rccc} [\,,\,]: & \mathfrak{gl}(n,\mathbb{k}) \times \mathfrak{gl}(n,\mathbb{k}) & \to & \mathfrak{gl}(n,\mathbb{k}) \\ & (M, N) & \mapsto & MN - NM \end{array}$$

Ejemplo (3)

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{k}$ y

$$\mathfrak{gl}(V) = \{T : V \to V : \ T \text{ lineal}\}$$

Podemos definir un corchete que le da estructura de álgebra de Lie.

$$\begin{array}{rccc} [\,,\,]: & \mathfrak{gl}(V) \times \mathfrak{gl}(V) & \to & \mathfrak{gl}(V) \\ & (T, S) & \mapsto & T \circ S - S \circ T \end{array}$$

Ejemplo (4)

Sea $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ matrices cuadradas sobre $\mathbb{k}$. Este espacio vectorial tiene estructura de álgebra de Lie definiendo en corchete como

$$\begin{array}{rccc} [\,,\,]: & \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k}) \times \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k}) & \to & \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k}) \\ & (M, N) & \mapsto & MN - NM \end{array}$$

Ejemplo (5)

Sea $\mathrm{sl}(n, \Bbbk)$ *el subespacio de* $\mathrm{gl}(n, \Bbbk)$ *de matrices de traza cero. Para matrices cuadradas arbitrarias* M, N*, la matriz* $MN - NM$ *tiene traza* 0*, así* $[M, N] = MN - NM$*, define una estructura de Lie sobre* $\mathrm{sl}(n, \Bbbk)$*. Esta álgebra de Lie se llama* **álgebra lineal especial**.

Ejemplo (6)

Sea $\mathrm{b}(n, \Bbbk)$ *el conjunto de matrices triangulares superiores en* $\mathrm{gl}(n, \Bbbk)$*. Esta es un álgebra de Lie con el mismo corchete de Lie de* $\mathrm{gl}(n, \Bbbk)$*.*
Similarmente, $\mathrm{n}(n, \Bbbk)$ *el conjunto de matrices estríctamente triangulares superiores en* $\mathrm{gl}(n, \Bbbk)$ *es un álgebra de Lie con el mismo corchete que* $\mathrm{gl}(n, \Bbbk)$*.*

Ejemplo (5)

Sea $\mathrm{sl}(n, \Bbbk)$ *el subespacio de* $\mathrm{gl}(n, \Bbbk)$ *de matrices de traza cero. Para matrices cuadradas arbitrarias* M, N*, la matriz* $MN - NM$ *tiene traza* 0*, así* $[M, N] = MN - NM$*, define una estructura de Lie sobre* $\mathrm{sl}(n, \Bbbk)$*. Esta álgebra de Lie se llama* **álgebra lineal especial**.

Ejemplo (6)

Sea $\mathrm{b}(n, \Bbbk)$ *el conjunto de matrices triangulares superiores en* $\mathrm{gl}(n, \Bbbk)$*. Esta es un álgebra de Lie con el mismo corchete de Lie de* $\mathrm{gl}(n, \Bbbk)$*.*

Similarmente, $\mathrm{n}(n, \Bbbk)$ *el conjunto de matrices estríctamente triangulares superiores en* $\mathrm{gl}(n, \Bbbk)$ *es un álgebra de Lie con el mismo corchete que* $\mathrm{gl}(n, \Bbbk)$*.*

Ejemplo (5)

Sea $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})$ *el subespacio de* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ *de matrices de traza cero. Para matrices cuadradas arbitrarias* M, N, *la matriz* $MN - NM$ *tiene traza* 0, *así* $[M, N] = MN - NM$, *define una estructura de Lie sobre* $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})$. *Esta álgebra de Lie se llama* **álgebra lineal especial**.

Ejemplo (6)

Sea $\mathfrak{b}(n, \mathbb{k})$ *el conjunto de matrices triangulares superiores en* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$. *Esta es un álgebra de Lie con el mismo corchete de Lie de* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$.
Similarmente, $\mathfrak{n}(n, \mathbb{k})$ *el conjunto de matrices estríctamente triangulares superiores en* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ *es un álgebra de Lie con el mismo corchete que* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$.

Definición

Sea $\mathfrak{L}$ un álgebra de Lie, decimos que $\mathfrak{S}$ es una **subálgebra de Lie** *de $\mathfrak{L}$ si es un subespacio vectorial $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{L}$ tal que*

$$[x, y] \in \mathfrak{S}, \quad \forall x, y \in \mathfrak{S}.$$

Definición

Un **ideal** *$\mathfrak{I}$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ es un subespacio de $\mathfrak{L}$ tal que:*

$$[x, y] \in \mathfrak{I}, \quad \forall x \in \mathfrak{L}, y \in \mathfrak{I}.$$

Observación:

Por la condición (1'), $[x, y] = -[y, x]$, así que no necesitamos distinguir entre ideales a izquierda o a derecha. Por ejemplo $\mathrm{sl}(n, \Bbbk)$ es un ideal de $\mathrm{gl}(n, \Bbbk)$; $\mathrm{b}(n, \Bbbk)$ es una subálgebra de $\mathrm{gl}(n, \Bbbk)$, pero si $n > 2$ no es un ideal.

Definición

Sea $\mathfrak{L}$ un álgebra de Lie, decimos que $\mathfrak{S}$ es una **subálgebra de Lie** *de $\mathfrak{L}$ si es un subespacio vectorial $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{L}$ tal que*

$$[x, y] \in \mathfrak{S}, \quad \forall x, y \in \mathfrak{S}.$$

Definición

Un **ideal** *$\mathfrak{I}$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ es un subespacio de $\mathfrak{L}$ tal que:*

$$[x, y] \in \mathfrak{I}, \quad \forall x \in \mathfrak{L}, y \in \mathfrak{I}.$$

Observación:

Por la condición (1'), $[x, y] = -[y, x]$, así que no necesitamos distinguir entre ideales a izquierda o a derecha. Por ejemplo $\mathrm{sl}(n, \mathbb{k})$ es un ideal de $\mathrm{gl}(n, \mathbb{k})$; $\mathrm{b}(n, \mathbb{k})$ es una subálgebra de $\mathrm{gl}(n, \mathbb{k})$, pero si $n > 2$ no es un ideal.

Definición

Sea $\mathfrak{L}$ un álgebra de Lie, decimos que $\mathfrak{S}$ es una **subálgebra de Lie** *de $\mathfrak{L}$ si es un subespacio vectorial $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{L}$ tal que*

$$[x, y] \in \mathfrak{S}, \quad \forall x, y \in \mathfrak{S}.$$

Definición

Un **ideal** *$\mathfrak{I}$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ es un subespacio de $\mathfrak{L}$ tal que:*

$$[x, y] \in \mathfrak{I}, \quad \forall x \in \mathfrak{L}, y \in \mathfrak{I}.$$

Observación:

Por la condición (1'), $[x, y] = -[y, x]$, así que no necesitamos distinguir entre ideales a izquierda o a derecha. Por ejemplo $\mathrm{sl}(n, \Bbbk)$ es un ideal de $\mathrm{gl}(n, \Bbbk)$; $\mathrm{b}(n, \Bbbk)$ es una subálgebra de $\mathrm{gl}(n, \Bbbk)$, pero si $n > 2$ no es un ideal.

Definición

Sea $\mathfrak{L}$ un álgebra de Lie, decimos que $\mathfrak{S}$ es una **subálgebra de Lie** *de $\mathfrak{L}$ si es un subespacio vectorial $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{L}$ tal que*

$$[x, y] \in \mathfrak{S}, \quad \forall x, y \in \mathfrak{S}.$$

Definición

Un **ideal** *$\mathfrak{I}$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ es un subespacio de $\mathfrak{L}$ tal que:*

$$[x, y] \in \mathfrak{I}, \quad \forall x \in \mathfrak{L}, y \in \mathfrak{I}.$$

Observación:

Por la condición (1'), $[x, y] = -[y, x]$, así que no necesitamos distinguir entre ideales a izquierda o a derecha. Por ejemplo $\mathrm{sl}(n, \mathbb{k})$ es un ideal de $\mathrm{gl}(n, \mathbb{k})$; $\mathrm{b}(n, \mathbb{k})$ es una subálgebra de $\mathrm{gl}(n, \mathbb{k})$, pero si $n > 2$ no es un ideal.

Definición

Sea $\mathfrak{L}$ un álgebra de Lie, decimos que $\mathfrak{S}$ es una **subálgebra de Lie** *de $\mathfrak{L}$ si es un subespacio vectorial $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{L}$ tal que*

$$[x, y] \in \mathfrak{S}, \quad \forall x, y \in \mathfrak{S}.$$

Definición

Un **ideal** *$\mathfrak{I}$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ es un subespacio de $\mathfrak{L}$ tal que:*

$$[x, y] \in \mathfrak{I}, \quad \forall x \in \mathfrak{L}, y \in \mathfrak{I}.$$

Observación:

Por la condición (1'), $[x, y] = -[y, x]$, así que no necesitamos distinguir entre ideales a izquierda o a derecha. Por ejemplo $\mathrm{sl}(n, \mathbb{k})$ es un ideal de $\mathrm{gl}(n, \mathbb{k})$; $\mathrm{b}(n, \mathbb{k})$ es una subálgebra de $\mathrm{gl}(n, \mathbb{k})$, pero si $n > 2$ no es un ideal.

Definición

Sea $\mathfrak{L}$ un álgebra de Lie, decimos que $\mathfrak{S}$ es una **subálgebra de Lie** *de $\mathfrak{L}$ si es un subespacio vectorial $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{L}$ tal que*

$$[x, y] \in \mathfrak{S}, \quad \forall x, y \in \mathfrak{S}.$$

Definición

Un **ideal** *$\mathfrak{I}$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ es un subespacio de $\mathfrak{L}$ tal que:*

$$[x, y] \in \mathfrak{I}, \quad \forall x \in \mathfrak{L}, y \in \mathfrak{I}.$$

Observación:

Por la condición (1'), $[x, y] = -[y, x]$, así que no necesitamos distinguir entre ideales a izquierda o a derecha. Por ejemplo $\mathrm{sl}(n, \mathbb{k})$ es un ideal de $\mathrm{gl}(n, \mathbb{k})$; $\mathrm{b}(n, \mathbb{k})$ es una subálgebra de $\mathrm{gl}(n, \mathbb{k})$, pero si $n > 2$ no es un ideal.

Definición

Sea $\mathfrak{L}$ un álgebra de Lie, decimos que $\mathfrak{S}$ es una **subálgebra de Lie** *de $\mathfrak{L}$ si es un subespacio vectorial $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{L}$ tal que*

$$[x, y] \in \mathfrak{S}, \quad \forall x, y \in \mathfrak{S}.$$

Definición

Un **ideal** *$\mathfrak{I}$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ es un subespacio de $\mathfrak{L}$ tal que:*

$$[x, y] \in \mathfrak{I}, \quad \forall x \in \mathfrak{L}, y \in \mathfrak{I}.$$

Observación:

Por la condición (1'), $[x, y] = -[y, x]$, así que no necesitamos distinguir entre ideales a izquierda o a derecha. Por ejemplo $\mathrm{sl}(n, \mathbb{k})$ es un ideal de $\mathrm{gl}(n, \mathbb{k})$; $\mathrm{b}(n, \mathbb{k})$ es una subálgebra de $\mathrm{gl}(n, \mathbb{k})$, pero si $n > 2$ no es un ideal.

Definición

Se define el **centro** *de un álgebra de Lie como:*

$$Z(L) = \{x \in L : [x, y] = 0 \, \forall y \in L\}.$$

Teorema

Sea L un álgebra de Lie y $Z(L)$ su centro. Entonces

$$L = Z(L) \Leftrightarrow L \text{ es abeliana.}$$

Definición (Homomorfismos entre álgebras de Lie)

Sean $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ dos álgebras de Lie sobre el mismo cuerpo $\mathbb{k}$, $\varphi : \mathfrak{L}_1 \to \mathfrak{L}_2$ es un **homomorfismo de Lie** *si φ es una TL tal que*

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)], \quad \forall x, y \in \mathfrak{L}_1.$$

Decimos que φ es un **isomorfismo** *si φ es además biyectiva.*

Definición

Se define el **centro** *de un álgebra de Lie como:*

$$Z(L) = \{x \in L : [x, y] = 0 \, \forall y \in L\}.$$

Teorema

Sea L un álgebra de Lie y $Z(L)$ su centro. Entonces

$$L = Z(L) \Leftrightarrow L \text{ es abeliana.}$$

Definición (Homomorfismos entre álgebras de Lie)

Sean $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ dos álgebras de Lie sobre el mismo cuerpo $\mathbb{k}$, $\varphi : \mathfrak{L}_1 \to \mathfrak{L}_2$ es un **homomorfismo de Lie** *si φ es una TL tal que*

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)], \quad \forall x, y \in \mathfrak{L}_1.$$

Decimos que φ es un **isomorfismo** *si φ es además biyectiva.*

Definición

Se define el **centro** *de un álgebra de Lie como:*

$$Z(L) = \{x \in L : [x, y] = 0 \, \forall y \in L\}.$$

Teorema

Sea L un álgebra de Lie y $Z(L)$ su centro. Entonces

$$L = Z(L) \Leftrightarrow L \text{ es abeliana.}$$

Definición (Homomorfismos entre álgebras de Lie)

Sean $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ dos álgebras de Lie sobre el mismo cuerpo $\mathbb{k}$, $\varphi : \mathfrak{L}_1 \to \mathfrak{L}_2$ es un **homomorfismo de Lie** *si φ es una TL tal que*

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)], \quad \forall x, y \in \mathfrak{L}_1.$$

Decimos que φ es un **isomorfismo** *si φ es además biyectiva.*

Definición

Se define el **centro** *de un álgebra de Lie como:*

$$Z(L) = \{x \in L : [x, y] = 0 \, \forall y \in L\}.$$

Teorema

Sea L un álgebra de Lie y $Z(L)$ su centro. Entonces

$$L = Z(L) \Leftrightarrow L \text{ es abeliana.}$$

Definición (Homomorfismos entre álgebras de Lie)

Sean $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ dos álgebras de Lie sobre el mismo cuerpo $\Bbbk$, $\varphi : \mathfrak{L}_1 \to \mathfrak{L}_2$ es un **homomorfismo de Lie** *si φ es una TL tal que*

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)], \quad \forall x, y \in \mathfrak{L}_1.$$

Decimos que φ es un **isomorfismo** *si φ es además biyectiva.*

Definición

Se define el **centro** *de un álgebra de Lie como:*

$$Z(L) = \{x \in L : [x, y] = 0 \, \forall y \in L\}.$$

Teorema

Sea L un álgebra de Lie y $Z(L)$ su centro. Entonces

$$L = Z(L) \Leftrightarrow L \text{ es abeliana.}$$

Definición (Homomorfismos entre álgebras de Lie)

Sean $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ dos álgebras de Lie sobre el mismo cuerpo $\mathbb{k}$, $\varphi : \mathfrak{L}_1 \to \mathfrak{L}_2$ es un **homomorfismo de Lie** *si φ es una TL tal que*

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)], \quad \forall x, y \in \mathfrak{L}_1.$$

Decimos que φ es un **isomorfismo** *si φ es además biyectiva.*

Definición

Se define el **centro** *de un álgebra de Lie como:*

$$Z(L) = \{x \in L : \ [x, y] = 0 \, \forall y \in L\}.$$

Teorema

Sea L un álgebra de Lie y $Z(L)$ su centro. Entonces

$$L = Z(L) \Leftrightarrow L \text{ es abeliana.}$$

Definición (Homomorfismos entre álgebras de Lie)

Sean $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ dos álgebras de Lie sobre el mismo cuerpo $\Bbbk$, $\varphi : \mathfrak{L}_1 \to \mathfrak{L}_2$ es un **homomorfismo de Lie** *si φ es una TL tal que*

$$\varphi([x, y]) = \big[\varphi(x), \varphi(y)\big], \quad \forall x, y \in \mathfrak{L}_1.$$

Decimos que φ es un **isomorfismo** *si φ es además biyectiva.*

Definición (Homomorfismo adjunto)

Si $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie el **homomorfismo adjunto** *se define como:*

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{ad}: & \mathfrak{L} & \to & \mathfrak{gl}(\mathfrak{L}) \\ & x & \mapsto & \mathrm{ad}(x): \begin{array}{l} \mathfrak{L} \to \mathfrak{L} \\ y \mapsto [x, y] \end{array} \end{array}$$

Observar que ad es una transformación lineal. Veamos que es un homomorfismo de Lie, es decir que se verifica que:

$$\mathrm{ad}\big([x, y]\big) = \big[\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y)\big] = \mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y) - \mathrm{ad}(y) \circ \mathrm{ad}(x).$$

$$\begin{aligned} \big(\mathrm{ad}\big([x, y]\big)\big)(z) &= [[x, y], z] = -[z, [x, y]] \\ &= [x, [y, z]] + [y, [z, x]] \\ &= \mathrm{ad}(x)([y, z]) + \mathrm{ad}(y)([z, x]) \\ &= \mathrm{ad}(x)\big(\mathrm{ad}(y)(z)\big) + \mathrm{ad}(y)\big(-\mathrm{ad}(x)(z)\big) \\ &= \big[\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y)\big](z). \end{aligned}$$

Definición (Homomorfismo adjunto)

Si $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie el **homomorfismo adjunto** *se define como:*

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{ad}: & \mathfrak{L} & \to & \mathfrak{gl}(\mathfrak{L}) \\ & x & \mapsto & \mathrm{ad}(x): \begin{array}{l} \mathfrak{L} \to \mathfrak{L} \\ y \mapsto [x,y] \end{array} \end{array}$$

Observar que ad es una transformación lineal. Veamos que es un homomorfismo de Lie, es decir que se verifica que:

$$\mathrm{ad}\big([x,y]\big) = \big[\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y)\big] = \mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y) - \mathrm{ad}(y) \circ \mathrm{ad}(x).$$

$$\begin{aligned} \big(\mathrm{ad}\big([x,y]\big)\big)(z) &= [[x,y],z] = -[z,[x,y]] \\ &= [x,[y,z]] + [y,[z,x]] \\ &= \mathrm{ad}(x)([y,z]) + \mathrm{ad}(y)([z,x]) \\ &= \mathrm{ad}(x)\big(\mathrm{ad}(y)(z)\big) + \mathrm{ad}(y)\big(-\mathrm{ad}(x)(z)\big) \\ &= \big[\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y)\big](z). \end{aligned}$$

Definición (Homomorfismo adjunto)

Si $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie el **homomorfismo adjunto** *se define como:*

$$\begin{array}{rccll} \mathrm{ad}: & \mathfrak{L} & \rightarrow & \mathfrak{gl}(\mathfrak{L}) & \\ & x & \mapsto & \mathrm{ad}(x): & \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L} \\ & & & & y \mapsto [x,y] \end{array}$$

Observar que ad es una transformación lineal. Veamos que es un homomorfismo de Lie, es decir que se verifica que:

$$\mathrm{ad}\big([x,y]\big) = \big[\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y)\big] = \mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y) - \mathrm{ad}(y) \circ \mathrm{ad}(x).$$

$$\begin{aligned} \big(\mathrm{ad}\big([x,y]\big)\big)(z) &= [[x,y],z] = -[z,[x,y]] \\ &= [x,[y,z]] + [y,[z,x]] \\ &= \mathrm{ad}(x)([y,z]) + \mathrm{ad}(y)([z,x]) \\ &= \mathrm{ad}(x)\big(\mathrm{ad}(y)(z)\big) + \mathrm{ad}(y)\big(-\mathrm{ad}(x)(z)\big) \\ &= \big[\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y)\big](z). \end{aligned}$$

Definición (Homomorfismo adjunto)

Si $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie el **homomorfismo adjunto** *se define como:*

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{ad}: & \mathfrak{L} & \to & \mathrm{gl}(\mathfrak{L}) \\ & x & \mapsto & \mathrm{ad}(x): \begin{array}[t]{l} \mathfrak{L} \to \mathfrak{L} \\ y \mapsto [x,y] \end{array} \end{array}$$

Observar que ad es una transformación lineal. Veamos que es un homomorfismo de Lie, es decir que se verifica que:

$$\mathrm{ad}\big([x,y]\big) = \big[\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y)\big] = \mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y) - \mathrm{ad}(y) \circ \mathrm{ad}(x).$$

$$\begin{aligned} \big(\mathrm{ad}\big([x,y]\big)\big)(z) &= [[x,y],z] = -[z,[x,y]] \\ &= [x,[y,z]] + [y,[z,x]] \\ &= \mathrm{ad}(x)([y,z]) + \mathrm{ad}(y)([z,x]) \\ &= \mathrm{ad}(x)\big(\mathrm{ad}(y)(z)\big) + \mathrm{ad}(y)\big(-\mathrm{ad}(x)(z)\big) \\ &= \big[\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y)\big](z). \end{aligned}$$

Definición (Homomorfismo adjunto)

Si $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie el **homomorfismo adjunto** *se define como:*

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{ad}: & \mathfrak{L} & \to & \mathfrak{gl}(\mathfrak{L}) \\ & x & \mapsto & \mathrm{ad}(x): \begin{array}{l} \mathfrak{L} \to \mathfrak{L} \\ y \mapsto [x,y] \end{array} \end{array}$$

Observar que ad es una transformación lineal. Veamos que es un homomorfismo de Lie, es decir que se verifica que:

$$\mathrm{ad}\big([x,y]\big) = \big[\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y)\big] = \mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y) - \mathrm{ad}(y) \circ \mathrm{ad}(x).$$

$$\begin{aligned} \big(\mathrm{ad}\big([x,y]\big)\big)(z) &= [[x,y],z] = -[z,[x,y]] \\ &= [x,[y,z]] + [y,[z,x]] \\ &= \mathrm{ad}(x)([y,z]) + \mathrm{ad}(y)([z,x]) \\ &= \mathrm{ad}(x)\big(\mathrm{ad}(y)(z)\big) + \mathrm{ad}(y)\big(-\mathrm{ad}(x)(z)\big) \\ &= \big[\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y)\big](z). \end{aligned}$$

Teorema

Sean $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ dos álgebras de Lie abelianas. $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ son isomorfas si y sólo si tienen la misma dimensión.

Definición (Álgebra derivada)

Sea $\mathfrak{L}$ un álgebra de Lie, definimos el **álgebra derivada** *de $\mathfrak{L}$, como la subálgebra $\mathfrak{L}' = [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$. Es decir:*

$$\mathfrak{L}' = \mathrm{span}\{[x,y] : x, y \in \mathfrak{L}\} = \left\{\sum c_i[x_i, y_i] : x_i, y_i \in \mathfrak{L}, c_i \in \Bbbk\right\}.$$

Ejemplo (7)

Sea $\mathfrak{L}$ el álgebra de matrices de la forma

$$\mathfrak{L} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C}\right\}$$

Teorema

Sean $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ dos álgebras de Lie abelianas. $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ son isomorfas si y sólo si tienen la misma dimensión.

Definición (Álgebra derivada)

Sea $\mathfrak{L}$ un álgebra de Lie, definimos el **álgebra derivada** *de $\mathfrak{L}$, como la subálgebra $\mathfrak{L}' = [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$. Es decir:*

$$\mathfrak{L}' = \mathrm{span}\{[x,y] : x, y \in \mathfrak{L}\} = \left\{\sum c_i[x_i, y_i] : \ x_i, y_i \in \mathfrak{L}, c_i \in \mathbb{k}\right\}.$$

Ejemplo (7)

Sea $\mathfrak{L}$ el álgebra de matrices de la forma

$$\mathfrak{L} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C}\right\}$$

Teorema

Sean $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ dos álgebras de Lie abelianas. $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ son isomorfas si y sólo si tienen la misma dimensión.

Definición (Álgebra derivada)

Sea $\mathfrak{L}$ un álgebra de Lie, definimos el **álgebra derivada** *de $\mathfrak{L}$, como la subálgebra $\mathfrak{L}' = [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$. Es decir:*

$$\mathfrak{L}' = \operatorname{span}\{[x, y] : x, y \in \mathfrak{L}\} = \left\{\sum c_i[x_i, y_i] : x_i, y_i \in \mathfrak{L}, c_i \in \Bbbk\right\}.$$

Ejemplo (7)

Sea $\mathfrak{L}$ el álgebra de matrices de la forma

$$\mathfrak{L} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C}\right\}$$

Teorema

Sean $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ dos álgebras de Lie abelianas. $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ son isomorfas si y sólo si tienen la misma dimensión.

Definición (Álgebra derivada)

Sea $\mathfrak{L}$ un álgebra de Lie, definimos el **álgebra derivada** *de $\mathfrak{L}$, como la subálgebra $\mathfrak{L}' = [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$. Es decir:*

$$\mathfrak{L}' = \operatorname{span}\{[x,y] : x, y \in \mathfrak{L}\} = \left\{ \sum c_i [x_i, y_i] : x_i, y_i \in \mathfrak{L}, c_i \in \Bbbk \right\}.$$

Ejemplo (7)

Sea $\mathfrak{L}$ el álgebra de matrices de la forma

$$\mathfrak{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C} \right\}$$

Ejemplo (7)

$M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *entonces* $[M, N] = MN - NM = 0$.
Por lo tanto $\mathfrak{L}' = \{0\}$.

Definición (Serie de derivadas)

Se define la **serie de derivadas** *de* $\mathfrak{L}$ *por la serie con los términos*

$$\mathfrak{L}^{(1)} = \mathfrak{L}' \text{ y } \mathfrak{L}^{(k)} = \left[\mathfrak{L}^{(k-1)}, \mathfrak{L}^{(k-1)}\right] \; k \geq 2,$$

donde tenemos que $\mathfrak{L} \supseteq \mathfrak{L}^{(1)} \supseteq \mathfrak{L}^{(2)} \supseteq \cdots$.
Decimos que $\mathfrak{L}$ *es* **resoluble** *si* $\exists n \geq 1$: $\mathfrak{L}^{(n)} = 0$.

Ejemplo (7)

$M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *entonces* $[M, N] = MN - NM = 0$.
Por lo tanto $\mathfrak{L}' = \{0\}$.

Definición (Serie de derivadas)

Se define la **serie de derivadas** *de* $\mathfrak{L}$ *por la serie con los términos*

$$\mathfrak{L}^{(1)} = \mathfrak{L}' \text{ y } \mathfrak{L}^{(k)} = \left[\mathfrak{L}^{(k-1)}, \mathfrak{L}^{(k-1)}\right] \; k \geq 2,$$

donde tenemos que $\mathfrak{L} \supseteq \mathfrak{L}^{(1)} \supseteq \mathfrak{L}^{(2)} \supseteq \cdots$.
Decimos que $\mathfrak{L}$ *es* **resoluble** *si* $\exists n \geq 1$: $\mathfrak{L}^{(n)} = 0$.

Ejemplo (7)

$M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *entonces* $[M, N] = MN - NM = 0$.
Por lo tanto $\mathfrak{L}' = \{0\}$.

Definición (Serie de derivadas)

Se define la **serie de derivadas** *de* $\mathfrak{L}$ *por la serie con los términos*

$$\mathfrak{L}^{(1)} = \mathfrak{L}' \text{ y } \mathfrak{L}^{(k)} = \left[\mathfrak{L}^{(k-1)}, \mathfrak{L}^{(k-1)}\right] \; k \geq 2,$$

donde tenemos que $\mathfrak{L} \supseteq \mathfrak{L}^{(1)} \supseteq \mathfrak{L}^{(2)} \supseteq \cdots$.
Decimos que $\mathfrak{L}$ *es* **resoluble** *si* $\exists n \geq 1$: $\mathfrak{L}^{(n)} = 0$.

Ejemplo (7)

$M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $[M, N] = MN - NM = 0$.
Por lo tanto $\mathfrak{L}' = \{0\}$.

Definición (Serie de derivadas)

Se define la **serie de derivadas** *de $\mathfrak{L}$ por la serie con los términos*

$$\mathfrak{L}^{(1)} = \mathfrak{L}' \text{ y } \mathfrak{L}^{(k)} = \left[\mathfrak{L}^{(k-1)}, \mathfrak{L}^{(k-1)}\right] \ k \geq 2,$$

donde tenemos que $\mathfrak{L} \supseteq \mathfrak{L}^{(1)} \supseteq \mathfrak{L}^{(2)} \supseteq \cdots$.
Decimos que $\mathfrak{L}$ es **resoluble** *si $\exists n \geq 1$: $\mathfrak{L}^{(n)} = 0$.*

Ejemplo (**Álgebra de Heisenberg**)

El álgebra de Heisenberg $\mathcal{H}_n$, es el álgebra de Lie real de dimensión $2n+1$ que tiene por base los elementos:

$$\{P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_n, C\}$$

y el corchete de Lie definido por

$$[P_i, P_j] = [Q_i, Q_j] = [P_i, C] = [Q_i, C] = [C, C] = 0, \ [P_i, Q_j] = C.$$

Estudiemos el caso particular de $n = 1$, $\mathcal{B} = \{P, Q, C\}$ tal que:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo (Álgebra de Heisenberg)

El álgebra de Heisenberg $\mathcal{H}_n$, *es el álgebra de Lie real de dimensión* $2n+1$ *que tiene por base los elementos:*

$$\{P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_n, C\}$$

y el corchete de Lie definido por

$$[P_i, P_j] = [Q_i, Q_j] = [P_i, C] = [Q_i, C] = [C, C] = 0, \ [P_i, Q_j] = C.$$

Estudiemos el caso particular de $n = 1$, $\mathcal{B} = \{P, Q, C\}$ *tal que:*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo (Álgebra de Heisenberg)

Entonces una forma de definir la forma matricial de los elementos del álgebra es:

$$pP + qQ + cC = \begin{pmatrix} 0 & p & c \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tomando el corchete de Lie $[P, Q] = PQ - QP$*, resulta evidente que* $[P, Q] = C$, $[P, C] = [Q, C] = 0$.

Observar que

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & p & c \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p' & c' \\ 0 & 0 & q' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & pq' - qp' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo (Álgebra de Heisenberg)

Entonces una forma de definir la forma matricial de los elementos del álgebra es:

$$pP + qQ + cC = \begin{pmatrix} 0 & p & c \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tomando el corchete de Lie $[P, Q] = PQ - QP$, *resulta evidente que* $[P, Q] = C$, $[P, C] = [Q, C] = 0$.

Observar que

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & p & c \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p' & c' \\ 0 & 0 & q' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & pq' - qp' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo (Álgebra de Heisenberg)

Entonces una forma de definir la forma matricial de los elementos del álgebra es:

$$pP + qQ + cC = \begin{pmatrix} 0 & p & c \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tomando el corchete de Lie $[P,Q] = PQ - QP$, *resulta evidente que* $[P,Q] = C$, $[P,C] = [Q,C] = 0$.
Observar que

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & p & c \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p' & c' \\ 0 & 0 & q' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & pq' - qp' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Álgebras de Lie resolubles

Ejemplo (Álgebra de Heisenberg)

Entonces $\mathcal{H}_1' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{C} \right\}$.

Ahora $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Entonces* $\mathcal{H}_1^{(2)} = 0$. *Por lo cual el álgebra de Heisenberg es resoluble.*

Ejemplo (9)

Si $\mathfrak{L} = \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$, *tenemos que* $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$ *y por lo tanto* $\mathfrak{L}^{(n)} = \mathfrak{L}$ *para todo* $n \geq 1$, *por lo cual* $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ *no es resoluble.*

Ejemplo (Álgebra de Heisenberg)

Entonces $\mathcal{H}_1' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{C} \right\}$.

Ahora $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Entonces* $\mathcal{H}_1^{(2)} = 0$. *Por lo cual el álgebra de Heisenberg es resoluble.*

Ejemplo (9)

Si $\mathfrak{L} = \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$, *tenemos que* $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$ *y por lo tanto* $\mathfrak{L}^{(n)} = \mathfrak{L}$ *para todo* $n \geq 1$, *por lo cual* $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ *no es resoluble.*

Álgebras de Lie resolubles

Ejemplo (Álgebra de Heisenberg)

Entonces $\mathcal{H}_1' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{C} \right\}$.

Ahora $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Entonces* $\mathcal{H}_1^{(2)} = 0$. *Por lo cual el álgebra de Heisenberg es resoluble.*

Ejemplo (9)

Si $\mathfrak{L} = \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$, *tenemos que* $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$ *y por lo tanto* $\mathfrak{L}^{(n)} = \mathfrak{L}$ *para todo* $n \geq 1$, *por lo cual* $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ *no es resoluble.*

Ejemplo (Álgebra de Heisenberg)

Entonces $\mathcal{H}_1' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{C} \right\}$.

Ahora $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Entonces* $\mathcal{H}_1^{(2)} = 0$. *Por lo cual el álgebra de Heisenberg es resoluble.*

Ejemplo (9)

Si $\mathfrak{L} = \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$, *tenemos que* $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$ *y por lo tanto* $\mathfrak{L}^{(n)} = \mathfrak{L}$ *para todo* $n \geq 1$, *por lo cual* $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ *no es resoluble.*

Ejemplo (Álgebra de Heisenberg)

Entonces $\mathcal{H}_1' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{C} \right\}$.

Ahora $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Entonces* $\mathcal{H}_1^{(2)} = 0$. *Por lo cual el álgebra de Heisenberg es resoluble.*

Ejemplo (9)

Si $\mathfrak{L} = \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$, *tenemos que* $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$ *y por lo tanto* $\mathfrak{L}^{(n)} = \mathfrak{L}$ *para todo* $n \geq 1$, *por lo cual* $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ *no es resoluble.*

Teorema

Sean $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ dos álgebras de Lie y $\varphi : \mathfrak{L}_1 \to \mathfrak{L}_2$ isomorfismo entre ellas. Entonces

1. $\varphi(\mathfrak{L}_1') = \mathfrak{L}_2'$.
2. $\varphi\big(Z(\mathfrak{L}_1)\big) = Z(\mathfrak{L}_2)$.

Ejercicio: Sean $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ dos álgebras de Lie. Consideremos $\mathfrak{L} = \big\{(x_1, x_2) : x_i \in \mathfrak{L}_i\big\}$ la suma directa de los espacios vectoriales subyacentes. Si definimos $\big[(x_1, x_2), (y_1, y_2)\big] = \big([x_1, y_1], [x_2, y_2]\big)$, probar que $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie. La misma también se llama **suma directa** de $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$.
Probar que si $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2$ entonces $Z(\mathfrak{L}) = Z(\mathfrak{L}_1) \oplus Z(\mathfrak{L}_2)$ y $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_1' \oplus \mathfrak{L}_2'$.

Teorema

Sean $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ dos álgebras de Lie y $\varphi : \mathfrak{L}_1 \to \mathfrak{L}_2$ isomorfismo entre ellas. Entonces

1. $\varphi(\mathfrak{L}_1') = \mathfrak{L}_2'$.
2. $\varphi\big(Z(\mathfrak{L}_1)\big) = Z(\mathfrak{L}_2)$.

Ejercicio: Sean $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ dos álgebras de Lie. Consideremos $\mathfrak{L} = \big\{(x_1, x_2) : x_i \in \mathfrak{L}_i\big\}$ la suma directa de los espacios vectoriales subyacentes. Si definimos $\big[(x_1, x_2), (y_1, y_2)\big] = \big([x_1, y_1], [x_2, y_2]\big)$, probar que $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie. La misma también se llama **suma directa** de $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$.
Probar que si $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2$ entonces $Z(\mathfrak{L}) = Z(\mathfrak{L}_1) \oplus Z(\mathfrak{L}_2)$ y $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_1' \oplus \mathfrak{L}_2'$.

Teorema

Sean $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ dos álgebras de Lie y $\varphi : \mathfrak{L}_1 \to \mathfrak{L}_2$ isomorfismo entre ellas. Entonces

1. $\varphi(\mathfrak{L}_1') = \mathfrak{L}_2'$.
2. $\varphi\big(Z(\mathfrak{L}_1)\big) = Z(\mathfrak{L}_2)$.

Ejercicio: Sean $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ dos álgebras de Lie. Consideremos $\mathfrak{L} = \big\{(x_1, x_2) : x_i \in \mathfrak{L}_i\big\}$ la suma directa de los espacios vectoriales subyacentes. Si definimos $\big[(x_1, x_2), (y_1, y_2)\big] = \big([x_1, y_1], [x_2, y_2]\big)$, probar que $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie. La misma también se llama **suma directa** de $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$.

Probar que si $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2$ entonces $Z(\mathfrak{L}) = Z(\mathfrak{L}_1) \oplus Z(\mathfrak{L}_2)$ y $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_1' \oplus \mathfrak{L}_2'$.

Teorema

Sean $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ dos álgebras de Lie y $\varphi : \mathfrak{L}_1 \to \mathfrak{L}_2$ isomorfismo entre ellas. Entonces

1. $\varphi(\mathfrak{L}_1') = \mathfrak{L}_2'$.
2. $\varphi\big(Z(\mathfrak{L}_1)\big) = Z(\mathfrak{L}_2)$.

Ejercicio: Sean $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ dos álgebras de Lie. Consideremos $\mathfrak{L} = \big\{(x_1, x_2) : x_i \in \mathfrak{L}_i\big\}$ la suma directa de los espacios vectoriales subyacentes. Si definimos $\big[(x_1, x_2), (y_1, y_2)\big] = \big([x_1, y_1], [x_2, y_2]\big)$, probar que $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie. La misma también se llama **suma directa** de $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$.

Probar que si $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2$ entonces $Z(\mathfrak{L}) = Z(\mathfrak{L}_1) \oplus Z(\mathfrak{L}_2)$ y $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_1' \oplus \mathfrak{L}_2'$.

Teorema

Sean $\mathfrak{L}_1$ *y* $\mathfrak{L}_2$ *dos álgebras de Lie y* $\varphi : \mathfrak{L}_1 \to \mathfrak{L}_2$ *isomorfismo entre ellas. Entonces*

1. $\varphi(\mathfrak{L}_1') = \mathfrak{L}_2'$.
2. $\varphi\big(Z(\mathfrak{L}_1)\big) = Z(\mathfrak{L}_2)$.

Ejercicio: Sean $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ dos álgebras de Lie. Consideremos $\mathfrak{L} = \big\{(x_1, x_2) : x_i \in \mathfrak{L}_i\big\}$ la suma directa de los espacios vectoriales subyacentes. Si definimos $\big[(x_1, x_2), (y_1, y_2)\big] = \big([x_1, y_1], [x_2, y_2]\big)$, probar que $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie. La misma también se llama **suma directa** de $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$.

Probar que si $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2$ entonces $Z(\mathfrak{L}) = Z(\mathfrak{L}_1) \oplus Z(\mathfrak{L}_2)$ y $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_1' \oplus \mathfrak{L}_2'$.

Teorema

Sean $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ dos álgebras de Lie y $\varphi : \mathfrak{L}_1 \to \mathfrak{L}_2$ isomorfismo entre ellas. Entonces

1. $\varphi(\mathfrak{L}_1') = \mathfrak{L}_2'$.
2. $\varphi\big(Z(\mathfrak{L}_1)\big) = Z(\mathfrak{L}_2)$.

Ejercicio: Sean $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ dos álgebras de Lie. Consideremos $\mathfrak{L} = \big\{(x_1, x_2) : x_i \in \mathfrak{L}_i\big\}$ la suma directa de los espacios vectoriales subyacentes. Si definimos $\big[(x_1, x_2), (y_1, y_2)\big] = \big([x_1, y_1], [x_2, y_2]\big)$, probar que $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie. La misma también se llama **suma directa** de $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$.

Probar que si $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2$ entonces $Z(\mathfrak{L}) = Z(\mathfrak{L}_1) \oplus Z(\mathfrak{L}_2)$ y $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_1' \oplus \mathfrak{L}_2'$.

Teorema

Sean $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ dos álgebras de Lie y $\varphi : \mathfrak{L}_1 \to \mathfrak{L}_2$ isomorfismo entre ellas. Entonces

1. $\varphi(\mathfrak{L}_1') = \mathfrak{L}_2'$.
2. $\varphi\big(Z(\mathfrak{L}_1)\big) = Z(\mathfrak{L}_2)$.

Ejercicio: Sean $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ dos álgebras de Lie. Consideremos $\mathfrak{L} = \big\{(x_1, x_2) : x_i \in \mathfrak{L}_i\big\}$ la suma directa de los espacios vectoriales subyacentes. Si definimos $\big[(x_1, x_2), (y_1, y_2)\big] = \big([x_1, y_1], [x_2, y_2]\big)$, probar que $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie. La misma también se llama **suma directa** de $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$.
Probar que si $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2$ entonces $Z(\mathfrak{L}) = Z(\mathfrak{L}_1) \oplus Z(\mathfrak{L}_2)$ y $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_1' \oplus \mathfrak{L}_2'$.