Introducción a las álgebras de Lie
Clasificación en dimensiones bajas

Ana González

IMERL, Facultad de Ingeniería

21 de Diciembre de 2017

6to Coloquio Uruguayo de Matemática

Álgebras de Lie abelianas: Las álgebras de Lie abelianas son fáciles de comprender. Para todo número natural n hay un álgebra de Lie abeliana de dimensión n.

Para entender entonces cuantas álgebras de Lie, esencialmente diferentes (no isomorfas) hay nos concentraremos en las no abelianas.

- Álgebras de Lie de diferentes dimensiones no pueden ser isomorfas: si lo fueran, en particular, serían isomorfas como espacios vectoriales $\Rightarrow$ tienen igual dimensión.
- Si $\mathfrak{L}$ es no abeliana $\Rightarrow$ su álgebra derivada $\mathfrak{L}'$ es no nula y su centro $Z(\mathfrak{L})$ es un ideal propio.
- Álgebras derivadas y centros se preservan por isomorfismos.

Entonces, es razonable usar la dimensión de $\mathfrak{L}$ y las propiedades de $\mathfrak{L}'$ y $Z(\mathfrak{L})$ para clasificar las álgebras de Lie.

Álgebras de Lie en dimensión baja

Álgebras de Lie abelianas: Las álgebras de Lie abelianas son fáciles de comprender. Para todo número natural n hay un álgebra de Lie abeliana de dimensión n.

Para entender entonces cuantas álgebras de Lie, esencialmente diferentes (no isomorfas) hay nos concentraremos en las no abelianas.

- Álgebras de Lie de diferentes dimensiones no pueden ser isomorfas: si lo fueran, en particular, serían isomorfas como espacios vectoriales $\Rightarrow$ tienen igual dimensión.
- Si $\mathfrak{L}$ es no abeliana $\Rightarrow$ su álgebra derivada $\mathfrak{L}'$ es no nula y su centro $Z(\mathfrak{L})$ es un ideal propio.
- Álgebras derivadas y centros se preservan por isomorfismos.

Entonces, es razonable usar la dimensión de $\mathfrak{L}$ y las propiedades de $\mathfrak{L}'$ y $Z(\mathfrak{L})$ para clasificar las álgebras de Lie.

Álgebras de Lie abelianas: Las álgebras de Lie abelianas son fáciles de comprender. Para todo número natural n hay un álgebra de Lie abeliana de dimensión n.

Para entender entonces cuantas álgebras de Lie, esencialmente diferentes (no isomorfas) hay nos concentraremos en las no abelianas.

- Álgebras de Lie de diferentes dimensiones no pueden ser isomorfas: si lo fueran, en particular, serían isomorfas como espacios vectoriales $\Rightarrow$ tienen igual dimensión.
- Si $\mathfrak{L}$ es no abeliana $\Rightarrow$ su álgebra derivada $\mathfrak{L}'$ es no nula y su centro $Z(\mathfrak{L})$ es un ideal propio.
- Álgebras derivadas y centros se preservan por isomorfismos.

Entonces, es razonable usar la dimensión de $\mathfrak{L}$ y las propiedades de $\mathfrak{L}'$ y $Z(\mathfrak{L})$ para clasificar las álgebras de Lie.

Álgebras de Lie en dimensión baja

Álgebras de Lie abelianas: Las álgebras de Lie abelianas son fáciles de comprender. Para todo número natural n hay un álgebra de Lie abeliana de dimensión n.

Para entender entonces cuantas álgebras de Lie, esencialmente diferentes (no isomorfas) hay nos concentraremos en las no abelianas.

- Álgebras de Lie de diferentes dimensiones no pueden ser isomorfas: si lo fueran, en particular, serían isomorfas como espacios vectoriales $\Rightarrow$ tienen igual dimensión.
- Si $\mathfrak{L}$ es no abeliana $\Rightarrow$ su álgebra derivada $\mathfrak{L}'$ es no nula y su centro $Z(\mathfrak{L})$ es un ideal propio.
- Álgebras derivadas y centros se preservan por isomorfismos.

Entonces, es razonable usar la dimensión de $\mathfrak{L}$ y las propiedades de $\mathfrak{L}'$ y $Z(\mathfrak{L})$ para clasificar las álgebras de Lie.

Álgebras de Lie abelianas: Las álgebras de Lie abelianas son fáciles de comprender. Para todo número natural n hay un álgebra de Lie abeliana de dimensión n.

Para entender entonces cuantas álgebras de Lie, esencialmente diferentes (no isomorfas) hay nos concentraremos en las no abelianas.

- Álgebras de Lie de diferentes dimensiones no pueden ser isomorfas: si lo fueran, en particular, serían isomorfas como espacios vectoriales $\Rightarrow$ tienen igual dimensión.
- Si $\mathfrak{L}$ es no abeliana $\Rightarrow$ su álgebra derivada $\mathfrak{L}'$ es no nula y su centro $Z(\mathfrak{L})$ es un ideal propio.
- Álgebras derivadas y centros se preservan por isomorfismos.

Entonces, es razonable usar la dimensión de $\mathfrak{L}$ y las propiedades de $\mathfrak{L}'$ y $Z(\mathfrak{L})$ para clasificar las álgebras de Lie.

Álgebras de Lie en dimensión baja

Álgebras de Lie abelianas: Las álgebras de Lie abelianas son fáciles de comprender. Para todo número natural n hay un álgebra de Lie abeliana de dimensión n.

Para entender entonces cuantas álgebras de Lie, esencialmente diferentes (no isomorfas) hay nos concentraremos en las no abelianas.

- Álgebras de Lie de diferentes dimensiones no pueden ser isomorfas: si lo fueran, en particular, serían isomorfas como espacios vectoriales $\Rightarrow$ tienen igual dimensión.
- Si $\mathfrak{L}$ es no abeliana $\Rightarrow$ su álgebra derivada $\mathfrak{L}'$ es no nula y su centro $Z(\mathfrak{L})$ es un ideal propio.
- Álgebras derivadas y centros se preservan por isomorfismos.

Entonces, es razonable usar la dimensión de $\mathfrak{L}$ y las propiedades de $\mathfrak{L}'$ y $Z(\mathfrak{L})$ para clasificar las álgebras de Lie.

Álgebras de Lie abelianas: Las álgebras de Lie abelianas son fáciles de comprender. Para todo número natural n hay un álgebra de Lie abeliana de dimensión n.

Para entender entonces cuantas álgebras de Lie, esencialmente diferentes (no isomorfas) hay nos concentraremos en las no abelianas.

- Álgebras de Lie de diferentes dimensiones no pueden ser isomorfas: si lo fueran, en particular, serían isomorfas como espacios vectoriales $\Rightarrow$ tienen igual dimensión.
- Si $\mathfrak{L}$ es no abeliana $\Rightarrow$ su álgebra derivada $\mathfrak{L}'$ es no nula y su centro $Z(\mathfrak{L})$ es un ideal propio.
- Álgebras derivadas y centros se preservan por isomorfismos.

Entonces, es razonable usar la dimensión de $\mathfrak{L}$ y las propiedades de $\mathfrak{L}'$ y $Z(\mathfrak{L})$ para clasificar las álgebras de Lie.

Álgebras de Lie abelianas: Las álgebras de Lie abelianas son fáciles de comprender. Para todo número natural n hay un álgebra de Lie abeliana de dimensión n.

Para entender entonces cuantas álgebras de Lie, esencialmente diferentes (no isomorfas) hay nos concentraremos en las no abelianas.

- Álgebras de Lie de diferentes dimensiones no pueden ser isomorfas: si lo fueran, en particular, serían isomorfas como espacios vectoriales $\Rightarrow$ tienen igual dimensión.
- Si $\mathfrak{L}$ es no abeliana $\Rightarrow$ su álgebra derivada $\mathfrak{L}'$ es no nula y su centro $Z(\mathfrak{L})$ es un ideal propio.
- Álgebras derivadas y centros se preservan por isomorfismos.

Entonces, es razonable usar la dimensión de $\mathfrak{L}$ y las propiedades de $\mathfrak{L}'$ y $Z(\mathfrak{L})$ para clasificar las álgebras de Lie.

Álgebras de Lie de dimensión 1 y 2

- Toda álgebra de Lie de dimensión 1 es abeliana.
- $\mathfrak{L}$ álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2 sobre $\Bbbk$.
  $\mathfrak{L}'$, debe tener a lo sumo dimensión 1: si $\{x, y\}$ es una base de $\mathfrak{L}$ entonces $\mathfrak{L}'$ esta generado por $[x, y]$. $\mathfrak{L}' \neq \{0\}$ porque $\mathfrak{L}$ no es abeliana.
  $\Rightarrow \dim \mathfrak{L}' = 1$.

Sea $x \in \mathfrak{L}'$ no nulo y $z \in \mathfrak{L}$: $\{x, z\}$ base de $\mathfrak{L} \Rightarrow 0 \neq [x, z] \in \mathfrak{L}'$, (porque $\mathfrak{L}$ es no abeliana) $\Rightarrow \exists \alpha \in \Bbbk$: $[x, z] = \alpha x$. Podemos cambiar z por $y = \alpha^{-1} z$ y se verifica que $[x, y] = x$.
Entonces, si un álgebra de Lie de dimensión 2 no abeliana existe, esta admite una base de la forma $\{x, y\}$ tal que $[x, y] = x$.

Álgebras de Lie de dimensión 1 y 2

- Toda álgebra de Lie de dimensión 1 es abeliana.
- $\mathfrak{L}$ álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2 sobre $\Bbbk$.
  $\mathfrak{L}'$, debe tener a lo sumo dimensión 1: si $\{x, y\}$ es una base de $\mathfrak{L}$ entonces $\mathfrak{L}'$ esta generado por $[x, y]$. $\mathfrak{L}' \neq \{0\}$ porque $\mathfrak{L}$ no es abeliana.
  $\Rightarrow \dim \mathfrak{L}' = 1$.

Sea $x \in \mathfrak{L}'$ no nulo y $z \in \mathfrak{L}$: $\{x, z\}$ base de $\mathfrak{L} \Rightarrow 0 \neq [x, z] \in \mathfrak{L}'$, (porque $\mathfrak{L}$ es no abeliana) $\Rightarrow \exists \alpha \in \Bbbk$: $[x, z] = \alpha x$. Podemos cambiar z por $y = \alpha^{-1} z$ y se verifica que $[x, y] = x$.
Entonces, si un álgebra de Lie de dimensión 2 no abeliana existe, esta admite una base de la forma $\{x, y\}$ tal que $[x, y] = x$.

Álgebras de Lie de dimensión 1 y 2

- Toda álgebra de Lie de dimensión 1 es abeliana.
- $\mathfrak{L}$ álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2 sobre $\mathbb{k}$.
  $\mathfrak{L}'$, debe tener a lo sumo dimensión 1: si $\{x, y\}$ es una base de $\mathfrak{L}$ entonces $\mathfrak{L}'$ esta generado por $[x, y]$. $\mathfrak{L}' \neq \{0\}$ porque $\mathfrak{L}$ no es abeliana.
  $\Rightarrow \dim \mathfrak{L}' = 1$.

Sea $x \in \mathfrak{L}'$ no nulo y $z \in \mathfrak{L}$: $\{x, z\}$ base de $\mathfrak{L} \Rightarrow 0 \neq [x, z] \in \mathfrak{L}'$, (porque $\mathfrak{L}$ es no abeliana) $\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{k}$: $[x, z] = \alpha x$. Podemos cambiar z por $y = \alpha^{-1} z$ y se verifica que $[x, y] = x$.
Entonces, si un álgebra de Lie de dimensión 2 no abeliana existe, esta admite una base de la forma $\{x, y\}$ tal que $[x, y] = x$.

Álgebras de Lie de dimensión 1 y 2

- Toda álgebra de Lie de dimensión 1 es abeliana.
- $\mathfrak{L}$ álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2 sobre $\Bbbk$.
  $\mathfrak{L}'$, debe tener a lo sumo dimensión 1: si $\{x, y\}$ es una base de $\mathfrak{L}$ entonces $\mathfrak{L}'$ esta generado por $[x, y]$. $\mathfrak{L}' \neq \{0\}$ porque $\mathfrak{L}$ no es abeliana.
  $\Rightarrow \dim \mathfrak{L}' = 1$.

Sea $x \in \mathfrak{L}'$ no nulo y $z \in \mathfrak{L}$: $\{x, z\}$ base de $\mathfrak{L} \Rightarrow 0 \neq [x, z] \in \mathfrak{L}'$, (porque $\mathfrak{L}$ es no abeliana) $\Rightarrow \exists \alpha \in \Bbbk$: $[x, z] = \alpha x$. Podemos cambiar z por $y = \alpha^{-1} z$ y se verifica que $[x, y] = x$.
Entonces, si un álgebra de Lie de dimensión 2 no abeliana existe, esta admite una base de la forma $\{x, y\}$ tal que $[x, y] = x$.

- Toda álgebra de Lie de dimensión 1 es abeliana.
- $\mathfrak{L}$ álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2 sobre $\Bbbk$.
  $\mathfrak{L}'$, debe tener a lo sumo dimensión 1: si $\{x, y\}$ es una base de $\mathfrak{L}$ entonces $\mathfrak{L}'$ esta generado por $[x, y]$. $\mathfrak{L}' \neq \{0\}$ porque $\mathfrak{L}$ no es abeliana.
  $\Rightarrow \dim \mathfrak{L}' = 1$.

Sea $x \in \mathfrak{L}'$ no nulo y $z \in \mathfrak{L}$: $\{x, z\}$ base de $\mathfrak{L} \Rightarrow 0 \neq [x, z] \in \mathfrak{L}'$, (porque $\mathfrak{L}$ es no abeliana) $\Rightarrow \exists \alpha \in \Bbbk$: $[x, z] = \alpha x$. Podemos cambiar z por $y = \alpha^{-1} z$ y se verifica que $[x, y] = x$.
Entonces, si un álgebra de Lie de dimensión 2 no abeliana existe, esta admite una base de la forma $\{x, y\}$ tal que $[x, y] = x$.

Álgebras de Lie de dimensión 1 y 2

- Toda álgebra de Lie de dimensión 1 es abeliana.
- $\mathfrak{L}$ álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2 sobre $\Bbbk$.
  $\mathfrak{L}'$, debe tener a lo sumo dimensión 1: si $\{x, y\}$ es una base de $\mathfrak{L}$ entonces $\mathfrak{L}'$ esta generado por $[x, y]$. $\mathfrak{L}' \neq \{0\}$ porque $\mathfrak{L}$ no es abeliana.
  $\Rightarrow \dim \mathfrak{L}' = 1$.

Sea $x \in \mathfrak{L}'$ no nulo y $z \in \mathfrak{L}$: $\{x, z\}$ base de $\mathfrak{L} \Rightarrow 0 \neq [x, z] \in \mathfrak{L}'$, (porque $\mathfrak{L}$ es no abeliana) $\Rightarrow \exists \alpha \in \Bbbk$: $[x, z] = \alpha x$. Podemos cambiar z por $y = \alpha^{-1} z$ y se verifica que $[x, y] = x$.
Entonces, si un álgebra de Lie de dimensión 2 no abeliana existe, esta admite una base de la forma $\{x, y\}$ tal que $[x, y] = x$.

- Toda álgebra de Lie de dimensión 1 es abeliana.
- $\mathfrak{L}$ álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2 sobre $\Bbbk$.
  $\mathfrak{L}'$, debe tener a lo sumo dimensión 1: si $\{x, y\}$ es una base de $\mathfrak{L}$ entonces $\mathfrak{L}'$ esta generado por $[x, y]$. $\mathfrak{L}' \neq \{0\}$ porque $\mathfrak{L}$ no es abeliana.
  $\Rightarrow \dim \mathfrak{L}' = 1$.

Sea $x \in \mathfrak{L}'$ no nulo y $z \in \mathfrak{L}$: $\{x, z\}$ base de $\mathfrak{L} \Rightarrow 0 \neq [x, z] \in \mathfrak{L}'$, (porque $\mathfrak{L}$ es no abeliana) $\Rightarrow \exists \alpha \in \Bbbk$: $[x, z] = \alpha x$. Podemos cambiar z por $y = \alpha^{-1} z$ y se verifica que $[x, y] = x$.
Entonces, si un álgebra de Lie de dimensión 2 no abeliana existe, esta admite una base de la forma $\{x, y\}$ tal que $[x, y] = x$.

- Toda álgebra de Lie de dimensión 1 es abeliana.
- $\mathfrak{L}$ álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2 sobre $\mathbb{k}$.
  $\mathfrak{L}'$, debe tener a lo sumo dimensión 1: si $\{x, y\}$ es una base de $\mathfrak{L}$ entonces $\mathfrak{L}'$ esta generado por $[x, y]$. $\mathfrak{L}' \neq \{0\}$ porque $\mathfrak{L}$ no es abeliana.
  $\Rightarrow \dim \mathfrak{L}' = 1$.

Sea $x \in \mathfrak{L}'$ no nulo y $z \in \mathfrak{L}$: $\{x, z\}$ base de $\mathfrak{L} \Rightarrow 0 \neq [x, z] \in \mathfrak{L}'$, (porque $\mathfrak{L}$ es no abeliana) $\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{k}$: $[x, z] = \alpha x$. Podemos cambiar z por $y = \alpha^{-1} z$ y se verifica que $[x, y] = x$.
Entonces, si un álgebra de Lie de dimensión 2 no abeliana existe, esta admite una base de la forma $\{x, y\}$ tal que $[x, y] = x$.

Álgebras de Lie de dimensión 1 y 2

- Toda álgebra de Lie de dimensión 1 es abeliana.
- $\mathfrak{L}$ álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2 sobre $\mathbb{k}$.
  $\mathfrak{L}'$, debe tener a lo sumo dimensión 1: si $\{x, y\}$ es una base de $\mathfrak{L}$ entonces $\mathfrak{L}'$ esta generado por $[x, y]$. $\mathfrak{L}' \neq \{0\}$ porque $\mathfrak{L}$ no es abeliana.
  $\Rightarrow \dim \mathfrak{L}' = 1$.

Sea $x \in \mathfrak{L}'$ no nulo y $z \in \mathfrak{L}$: $\{x, z\}$ base de $\mathfrak{L} \Rightarrow 0 \neq [x, z] \in \mathfrak{L}'$, (porque $\mathfrak{L}$ es no abeliana) $\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{k}$: $[x, z] = \alpha x$. Podemos cambiar z por $y = \alpha^{-1} z$ y se verifica que $[x, y] = x$.
Entonces, si un álgebra de Lie de dimensión 2 no abeliana existe, esta admite una base de la forma $\{x, y\}$ tal que $[x, y] = x$.

Lema

Sea $\mathfrak{L}$ un espacio vectorial de dimensión 2 con base $\{x, y\}$. Si definimos $[\ ,\ ]$ en $\mathfrak{L}$ tal que $[u, u] = 0$, para todo $u \in \mathfrak{L}$. Entonces la identidad de Jacobi se verifica y por lo tanto $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie.

Teorema

Para un cuerpo cualquiera $\mathbb{k}$, a menos de isomorfismo existe una única álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2. Esta álgebra admite una base $\{x, y\}$: $[x, y] = x$ y el centro es 0.

Álgebras de Lie de dimensión 1 y 2

Lema

Sea $\mathfrak{L}$ un espacio vectorial de dimensión 2 con base $\{x, y\}$. Si definimos $[\,,\,]$ en $\mathfrak{L}$ tal que $[u, u] = 0$, para todo $u \in \mathfrak{L}$. Entonces la identidad de Jacobi se verifica y por lo tanto $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie.

Teorema

Para un cuerpo cualquiera $\Bbbk$, a menos de isomorfismo existe una única álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2. Esta álgebra admite una base $\{x, y\}$: $[x, y] = x$ y el centro es 0.

Álgebras de Lie de dimensión 1 y 2

Lema

Sea $\mathfrak{L}$ un espacio vectorial de dimensión 2 con base $\{x, y\}$. Si definimos $[\ ,\ ]$ en $\mathfrak{L}$ tal que $[u, u] = 0$, para todo $u \in \mathfrak{L}$. Entonces la identidad de Jacobi se verifica y por lo tanto $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie.

Teorema

Para un cuerpo cualquiera $\Bbbk$, a menos de isomorfismo existe una única álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2. Esta álgebra admite una base $\{x, y\}$: $[x, y] = x$ y el centro es 0.

$\mathfrak{L}$ álgebra de Lie de dimensión 3 sobre $\mathbb{k}$, no abeliana.

Su álgebra derivada $\mathfrak{L}'$ es no nula. Esta puede tener dimensión 1, 2 o 3. El centro $Z(\mathfrak{L})$ es un ideal propio de $\mathfrak{L}$.

- $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$.
  El álgebra de Heisenberg de dimensión 3, $\mathcal{H}_1$, tiene estas propieades. Recordemos, la estructura de Lie está dada sobre una base $\{P, Q, C\}$: $[P, Q] = C$ y $[C, P] = [C, Q] = 0$, es decir $C \in Z(\mathcal{H}_1) \Rightarrow \mathcal{H}_1' \subset Z(\mathcal{H}_1)$. Además $\mathcal{H}_1'$ está generado por $C \Rightarrow \dim \mathcal{H}_1' = 1$.

  A menos de isomorfismo, esta es la única álgebra de Lie de dimensión 3: $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$ y $\dim \mathfrak{L}' = 1$. Sea $\mathfrak{L}$ un álgebra de Lie con estas condiciones , tomemos $f, g \in \mathfrak{L}$ tales que $[f, g] \neq 0$.
  Como $\dim \mathfrak{L}' = 1$, $[f, g]$ genera a $\mathfrak{L}'$. Como $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$, $[f, g] \in Z(\mathfrak{L})$. Definimos $z = [f, g]$, entonces $\{f, g, z\}$ es LI y por lo tanto base de $\mathfrak{L}$.

$\mathfrak{L}$ álgebra de Lie de dimensión 3 sobre $\mathbb{k}$, no abeliana.
Su álgebra derivada $\mathfrak{L}'$ es no nula. Esta puede tener dimensión 1, 2 o 3. El centro $Z(\mathfrak{L})$ es un ideal propio de $\mathfrak{L}$.

- $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$.
  El álgebra de Heisenberg de dimensión 3, $\mathcal{H}_1$, tiene estas propieades. Recordemos, la estructura de Lie está dada sobre una base $\{P, Q, C\}$: $[P, Q] = C$ y $[C, P] = [C, Q] = 0$, es decir $C \in Z(\mathcal{H}_1) \Rightarrow \mathcal{H}_1' \subset Z(\mathcal{H}_1)$. Además $\mathcal{H}_1'$ está generado por $C \Rightarrow \dim \mathcal{H}_1' = 1$.

  A menos de isomorfismo, esta es la única álgebra de Lie de dimensión 3: $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$ y $\dim \mathfrak{L}' = 1$. Sea $\mathfrak{L}$ un álgebra de Lie con estas condiciones , tomemos $f, g \in \mathfrak{L}$ tales que $[f, g] \neq 0$.
  Como $\dim \mathfrak{L}' = 1$, $[f, g]$ genera a $\mathfrak{L}'$. Como $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$, $[f, g] \in Z(\mathfrak{L})$. Definimos $z = [f, g]$, entonces $\{f, g, z\}$ es LI y por lo tanto base de $\mathfrak{L}$.

$\mathfrak{L}$ álgebra de Lie de dimensión 3 sobre $\Bbbk$, no abeliana.
Su álgebra derivada $\mathfrak{L}'$ es no nula. Esta puede tener dimensión 1, 2 o 3. El centro $Z(\mathfrak{L})$ es un ideal propio de $\mathfrak{L}$.

- $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$.
  El álgebra de Heisenberg de dimensión 3, $\mathcal{H}_1$, tiene estas propieades. Recordemos, la estructura de Lie está dada sobre una base $\{P, Q, C\}$: $[P, Q] = C$ y $[C, P] = [C, Q] = 0$, es decir $C \in Z(\mathcal{H}_1) \Rightarrow \mathcal{H}_1' \subset Z(\mathcal{H}_1)$. Además $\mathcal{H}_1'$ está generado por $C \Rightarrow \dim \mathcal{H}_1' = 1$.

  A menos de isomorfismo, esta es la única álgebra de Lie de dimensión 3: $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$ y $\dim \mathfrak{L}' = 1$. Sea $\mathfrak{L}$ un álgebra de Lie con estas condiciones , tomemos $f, g \in \mathfrak{L}$ tales que $[f, g] \neq 0$.
  Como $\dim \mathfrak{L}' = 1$, $[f, g]$ genera a $\mathfrak{L}'$. Como $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$, $[f, g] \in Z(\mathfrak{L})$. Definimos $z = [f, g]$, entonces $\{f, g, z\}$ es LI y por lo tanto base de $\mathfrak{L}$.

Álgebras de Lie de dimensión 3

$\mathfrak{L}$ álgebra de Lie de dimensión 3 sobre $\mathbb{k}$, no abeliana.
Su álgebra derivada $\mathfrak{L}'$ es no nula. Esta puede tener dimensión 1, 2 o 3. El centro $Z(\mathfrak{L})$ es un ideal propio de $\mathfrak{L}$.

- $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$.
  El álgebra de Heisenberg de dimensión 3, $\mathcal{H}_1$, tiene estas propieades. Recordemos, la estructura de Lie está dada sobre una base $\{P, Q, C\}$: $[P, Q] = C$ y $[C, P] = [C, Q] = 0$, es decir $C \in Z(\mathcal{H}_1) \Rightarrow \mathcal{H}_1' \subset Z(\mathcal{H}_1)$. Además $\mathcal{H}_1'$ está generado por $C \Rightarrow \dim \mathcal{H}_1' = 1$.

  A menos de isomorfismo, esta es la única álgebra de Lie de dimensión 3: $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$ y $\dim \mathfrak{L}' = 1$. Sea $\mathfrak{L}$ un álgebra de Lie con estas condiciones , tomemos $f, g \in \mathfrak{L}$ tales que $[f, g] \neq 0$.
  Como $\dim \mathfrak{L}' = 1$, $[f, g]$ genera a $\mathfrak{L}'$. Como $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$, $[f, g] \in Z(\mathfrak{L})$. Definimos $z = [f, g]$, entonces $\{f, g, z\}$ es LI y por lo tanto base de $\mathfrak{L}$.

$\mathfrak{L}$ álgebra de Lie de dimensión 3 sobre $\mathbb{k}$, no abeliana.
Su álgebra derivada $\mathfrak{L}'$ es no nula. Esta puede tener dimensión 1, 2 o 3. El centro $Z(\mathfrak{L})$ es un ideal propio de $\mathfrak{L}$.

- $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$.

  El álgebra de Heisenberg de dimensión 3, $\mathcal{H}_1$, tiene estas propieades. Recordemos, la estructura de Lie está dada sobre una base $\{P, Q, C\}$: $[P, Q] = C$ y $[C, P] = [C, Q] = 0$, es decir $C \in Z(\mathcal{H}_1) \Rightarrow \mathcal{H}_1' \subset Z(\mathcal{H}_1)$. Además $\mathcal{H}_1'$ está generado por $C \Rightarrow \dim \mathcal{H}_1' = 1$.

  A menos de isomorfismo, esta es la única álgebra de Lie de dimensión 3: $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$ y $\dim \mathfrak{L}' = 1$. Sea $\mathfrak{L}$ un álgebra de Lie con estas condiciones , tomemos $f, g \in \mathfrak{L}$ tales que $[f, g] \neq 0$.
  Como $\dim \mathfrak{L}' = 1$, $[f, g]$ genera a $\mathfrak{L}'$. Como $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$, $[f, g] \in Z(\mathfrak{L})$. Definimos $z = [f, g]$, entonces $\{f, g, z\}$ es LI y por lo tanto base de $\mathfrak{L}$.

$\mathfrak{L}$ álgebra de Lie de dimensión 3 sobre $\mathbb{k}$, no abeliana.
Su álgebra derivada $\mathfrak{L}'$ es no nula. Esta puede tener dimensión 1, 2 o 3. El centro $Z(\mathfrak{L})$ es un ideal propio de $\mathfrak{L}$.

- $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$.
  El álgebra de Heisenberg de dimensión 3, $\mathcal{H}_1$, tiene estas propieades. Recordemos, la estructura de Lie está dada sobre una base $\{P, Q, C\}$: $[P, Q] = C$ y $[C, P] = [C, Q] = 0$, es decir $C \in Z(\mathcal{H}_1) \Rightarrow \mathcal{H}_1' \subset Z(\mathcal{H}_1)$. Además $\mathcal{H}_1'$ está generado por $C \Rightarrow \dim \mathcal{H}_1' = 1$.

  A menos de isomorfismo, esta es la única álgebra de Lie de dimensión 3: $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$ y $\dim \mathfrak{L}' = 1$. Sea $\mathfrak{L}$ un álgebra de Lie con estas condiciones , tomemos $f, g \in \mathfrak{L}$ tales que $[f, g] \neq 0$.
  Como $\dim \mathfrak{L}' = 1$, $[f, g]$ genera a $\mathfrak{L}'$. Como $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$, $[f, g] \in Z(\mathfrak{L})$. Definimos $z = [f, g]$, entonces $\{f, g, z\}$ es LI y por lo tanto base de $\mathfrak{L}$.

$\mathfrak{L}$ álgebra de Lie de dimensión 3 sobre $\mathbb{k}$, no abeliana.
Su álgebra derivada $\mathfrak{L}'$ es no nula. Esta puede tener dimensión 1, 2 o 3. El centro $Z(\mathfrak{L})$ es un ideal propio de $\mathfrak{L}$.

- $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$.
  El álgebra de Heisenberg de dimensión 3, $\mathcal{H}_1$, tiene estas propieades. Recordemos, la estructura de Lie está dada sobre una base $\{P, Q, C\}$: $[P, Q] = C$ y $[C, P] = [C, Q] = 0$, es decir $C \in Z(\mathcal{H}_1) \Rightarrow \mathcal{H}_1' \subset Z(\mathcal{H}_1)$. Además $\mathcal{H}_1'$ está generado por $C \Rightarrow \dim \mathcal{H}_1' = 1$.

  A menos de isomorfismo, esta es la única álgebra de Lie de dimensión 3: $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$ y $\dim \mathfrak{L}' = 1$. Sea $\mathfrak{L}$ un álgebra de Lie con estas condiciones , tomemos $f, g \in \mathfrak{L}$ tales que $[f, g] \neq 0$.
  Como $\dim \mathfrak{L}' = 1$, $[f, g]$ genera a $\mathfrak{L}'$. Como $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$, $[f, g] \in Z(\mathfrak{L})$. Definimos $z = [f, g]$, entonces $\{f, g, z\}$ es LI y por lo tanto base de $\mathfrak{L}$.

$\mathfrak{L}$ álgebra de Lie de dimensión 3 sobre $\Bbbk$, no abeliana.
Su álgebra derivada $\mathfrak{L}'$ es no nula. Esta puede tener dimensión 1, 2 o 3. El centro $Z(\mathfrak{L})$ es un ideal propio de $\mathfrak{L}$.

- $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$.
  El álgebra de Heisenberg de dimensión 3, $\mathcal{H}_1$, tiene estas propieades. Recordemos, la estructura de Lie está dada sobre una base $\{P, Q, C\}$: $[P, Q] = C$ y $[C, P] = [C, Q] = 0$, es decir $C \in Z(\mathcal{H}_1) \Rightarrow \mathcal{H}_1' \subset Z(\mathcal{H}_1)$. Además $\mathcal{H}_1'$ está generado por $C \Rightarrow \dim \mathcal{H}_1' = 1$.

  A menos de isomorfismo, esta es la única álgebra de Lie de dimensión 3: $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$ y $\dim \mathfrak{L}' = 1$. Sea $\mathfrak{L}$ un álgebra de Lie con estas condiciones , tomemos $f, g \in \mathfrak{L}$ tales que $[f, g] \neq 0$.
  Como $\dim \mathfrak{L}' = 1$, $[f, g]$ genera a $\mathfrak{L}'$. Como $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$, $[f, g] \in Z(\mathfrak{L})$. Definimos $z = [f, g]$, entonces $\{f, g, z\}$ es LI y por lo tanto base de $\mathfrak{L}$.

$\mathfrak{L}$ álgebra de Lie de dimensión 3 sobre $\mathbb{k}$, no abeliana.
Su álgebra derivada $\mathfrak{L}'$ es no nula. Esta puede tener dimensión 1, 2 o 3. El centro $Z(\mathfrak{L})$ es un ideal propio de $\mathfrak{L}$.

- $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$.
  El álgebra de Heisenberg de dimensión 3, $\mathcal{H}_1$, tiene estas propieades. Recordemos, la estructura de Lie está dada sobre una base $\{P, Q, C\}$: $[P, Q] = C$ y $[C, P] = [C, Q] = 0$, es decir $C \in Z(\mathcal{H}_1) \Rightarrow \mathcal{H}_1' \subset Z(\mathcal{H}_1)$. Además $\mathcal{H}_1'$ está generado por $C \Rightarrow \dim \mathcal{H}_1' = 1$.

  A menos de isomorfismo, esta es la única álgebra de Lie de dimensión 3: $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$ y $\dim \mathfrak{L}' = 1$. Sea $\mathfrak{L}$ un álgebra de Lie con estas condiciones , tomemos $f, g \in \mathfrak{L}$ tales que $[f, g] \neq 0$.
  Como $\dim \mathfrak{L}' = 1$, $[f, g]$ genera a $\mathfrak{L}'$. Como $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$, $[f, g] \in Z(\mathfrak{L})$. Definimos $z = [f, g]$, entonces $\{f, g, z\}$ es LI y por lo tanto base de $\mathfrak{L}$.

$\mathfrak{L}$ álgebra de Lie de dimensión 3 sobre $\Bbbk$, no abeliana.
Su álgebra derivada $\mathfrak{L}'$ es no nula. Esta puede tener dimensión 1, 2 o 3. El centro $Z(\mathfrak{L})$ es un ideal propio de $\mathfrak{L}$.

- $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$.
  El álgebra de Heisenberg de dimensión 3, $\mathcal{H}_1$, tiene estas propieades. Recordemos, la estructura de Lie está dada sobre una base $\{P, Q, C\}$: $[P, Q] = C$ y $[C, P] = [C, Q] = 0$, es decir $C \in Z(\mathcal{H}_1) \Rightarrow \mathcal{H}_1' \subset Z(\mathcal{H}_1)$. Además $\mathcal{H}_1'$ está generado por $C \Rightarrow \dim \mathcal{H}_1' = 1$.

  A menos de isomorfismo, esta es la única álgebra de Lie de dimensión 3: $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$ y $\dim \mathfrak{L}' = 1$. Sea $\mathfrak{L}$ un álgebra de Lie con estas condiciones , tomemos $f, g \in \mathfrak{L}$ tales que $[f, g] \neq 0$.
  Como $\dim \mathfrak{L}' = 1$, $[f, g]$ genera a $\mathfrak{L}'$. Como $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$, $[f, g] \in Z(\mathfrak{L})$. Definimos $z = [f, g]$, entonces $\{f, g, z\}$ es LI y por lo tanto base de $\mathfrak{L}$.

$\mathfrak{L}$ álgebra de Lie de dimensión 3 sobre $\mathbb{k}$, no abeliana.
Su álgebra derivada $\mathfrak{L}'$ es no nula. Esta puede tener dimensión 1, 2 o 3. El centro $Z(\mathfrak{L})$ es un ideal propio de $\mathfrak{L}$.

- $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$.
  El álgebra de Heisenberg de dimensión 3, $\mathcal{H}_1$, tiene estas propieades. Recordemos, la estructura de Lie está dada sobre una base $\{P, Q, C\}$: $[P, Q] = C$ y $[C, P] = [C, Q] = 0$, es decir $C \in Z(\mathcal{H}_1) \Rightarrow \mathcal{H}_1' \subset Z(\mathcal{H}_1)$. Además $\mathcal{H}_1'$ está generado por $C \Rightarrow \dim \mathcal{H}_1' = 1$.

  A menos de isomorfismo, esta es la única álgebra de Lie de dimensión 3: $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$ y $\dim \mathfrak{L}' = 1$. Sea $\mathfrak{L}$ un álgebra de Lie con estas condiciones , tomemos $f, g \in \mathfrak{L}$ tales que $[f, g] \neq 0$.
  Como $\dim \mathfrak{L}' = 1$, $[f, g]$ genera a $\mathfrak{L}'$. Como $\mathfrak{L}' \subset Z(\mathfrak{L})$, $[f, g] \in Z(\mathfrak{L})$. Definimos $z = [f, g]$, entonces $\{f, g, z\}$ es LI y por lo tanto base de $\mathfrak{L}$.

- $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \not\subset Z(\mathfrak{L})$.

  Sea $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_1$ tiene dimensión 2 y es no abeliana y $\mathfrak{L}_2$ tiene dimensión 1.
  $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_1' \oplus \mathfrak{L}_2' = \mathfrak{L}_1'$, enotonces $\mathfrak{L}'$ tiene dimensión 1. Además, $Z(\mathfrak{L}) = Z(\mathfrak{L}_1) \oplus Z(\mathfrak{L}_2) = \mathfrak{L}_2$, entonces $\mathfrak{L}'$ no está contenido en $Z(\mathfrak{L})$.

  A menos de isomorfismo, es la única álgebra de Lie con estas propiedades.

Teorema

Existe una única álgebra de Lie sobre $\mathbb{k}$ de dimensión 3 tal que $\dim \mathfrak{L}' = 1$ *y* $\mathfrak{L}' \not\subset Z(\mathfrak{L})$. *Es suma directa del álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2 con el álgebra de Lie de dimensión 1.*

- $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \not\subset Z(\mathfrak{L})$.
  Sea $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_1$ tiene dimensión 2 y es no abeliana y $\mathfrak{L}_2$ tiene dimensión 1.
  $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_1' \oplus \mathfrak{L}_2' = \mathfrak{L}_1'$, enotonces $\mathfrak{L}'$ tiene dimensión 1. Además, $Z(\mathfrak{L}) = Z(\mathfrak{L}_1) \oplus Z(\mathfrak{L}_2) = \mathfrak{L}_2$, entonces $\mathfrak{L}'$ no está contenido en $Z(\mathfrak{L})$.

  A menos de isomorfismo, es la única álgebra de Lie con estas propiedades.

Teorema

Existe una única álgebra de Lie sobre $\mathbb{k}$ de dimensión 3 tal que $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \not\subset Z(\mathfrak{L})$. Es suma directa del álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2 con el álgebra de Lie de dimensión 1.

- $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \not\subset Z(\mathfrak{L})$.
  Sea $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_1$ tiene dimensión 2 y es no abeliana y $\mathfrak{L}_2$ tiene dimensión 1.
  $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_1' \oplus \mathfrak{L}_2' = \mathfrak{L}_1'$, enotonces $\mathfrak{L}'$ tiene dimensión 1. Además, $Z(\mathfrak{L}) = Z(\mathfrak{L}_1) \oplus Z(\mathfrak{L}_2) = \mathfrak{L}_2$, entonces $\mathfrak{L}'$ no está contenido en $Z(\mathfrak{L})$.

  A menos de isomorfismo, es la única álgebra de Lie con estas propiedades.

Teorema

Existe una única álgebra de Lie sobre $\Bbbk$ de dimensión 3 tal que $\dim \mathfrak{L}' = 1$ *y* $\mathfrak{L}' \not\subset Z(\mathfrak{L})$. *Es suma directa del álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2 con el álgebra de Lie de dimensión 1.*

- $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \not\subset Z(\mathfrak{L})$.
  Sea $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_1$ tiene dimensión 2 y es no abeliana y $\mathfrak{L}_2$ tiene dimensión 1.
  $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_1' \oplus \mathfrak{L}_2' = \mathfrak{L}_1'$, enotonces $\mathfrak{L}'$ tiene dimensión 1. Además, $Z(\mathfrak{L}) = Z(\mathfrak{L}_1) \oplus Z(\mathfrak{L}_2) = \mathfrak{L}_2$, entonces $\mathfrak{L}'$ no está contenido en $Z(\mathfrak{L})$.

  A menos de isomorfismo, es la única álgebra de Lie con estas propiedades.

Teorema

Existe una única álgebra de Lie sobre $\mathbb{k}$ de dimensión 3 tal que $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \not\subset Z(\mathfrak{L})$. Es suma directa del álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2 con el álgebra de Lie de dimensión 1.

Álgebras de Lie de dimensión 3

- $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \not\subset Z(\mathfrak{L})$.
  Sea $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_1$ tiene dimensión 2 y es no abeliana y $\mathfrak{L}_2$ tiene dimensión 1.
  $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_1' \oplus \mathfrak{L}_2' = \mathfrak{L}_1'$, enotonces $\mathfrak{L}'$ tiene dimensión 1. Además, $Z(\mathfrak{L}) = Z(\mathfrak{L}_1) \oplus Z(\mathfrak{L}_2) = \mathfrak{L}_2$, entonces $\mathfrak{L}'$ no está contenido en $Z(\mathfrak{L})$.

  A menos de isomorfismo, es la única álgebra de Lie con estas propiedades.

Teorema

Existe una única álgebra de Lie sobre $\Bbbk$ de dimensión 3 tal que $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \not\subset Z(\mathfrak{L})$. Es suma directa del álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2 con el álgebra de Lie de dimensión 1.

Álgebras de Lie de dimensión 3

- $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \not\subset Z(\mathfrak{L})$.
  Sea $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_1$ tiene dimensión 2 y es no abeliana y $\mathfrak{L}_2$ tiene dimensión 1.
  $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_1' \oplus \mathfrak{L}_2' = \mathfrak{L}_1'$, enotonces $\mathfrak{L}'$ tiene dimensión 1. Además, $Z(\mathfrak{L}) = Z(\mathfrak{L}_1) \oplus Z(\mathfrak{L}_2) = \mathfrak{L}_2$, entonces $\mathfrak{L}'$ no está contenido en $Z(\mathfrak{L})$.

  A menos de isomorfismo, es la única álgebra de Lie con estas propiedades.

Teorema

Existe una única álgebra de Lie sobre $\Bbbk$ de dimensión 3 tal que $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \not\subset Z(\mathfrak{L})$. Es suma directa del álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2 con el álgebra de Lie de dimensión 1.

- $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \not\subset Z(\mathfrak{L})$.
  Sea $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_1$ tiene dimensión 2 y es no abeliana y $\mathfrak{L}_2$ tiene dimensión 1.
  $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_1' \oplus \mathfrak{L}_2' = \mathfrak{L}_1'$, enotonces $\mathfrak{L}'$ tiene dimensión 1. Además, $Z(\mathfrak{L}) = Z(\mathfrak{L}_1) \oplus Z(\mathfrak{L}_2) = \mathfrak{L}_2$, entonces $\mathfrak{L}'$ no está contenido en $Z(\mathfrak{L})$.

  A menos de isomorfismo, es la única álgebra de Lie con estas propiedades.

Teorema

Existe una única álgebra de Lie sobre $\Bbbk$ de dimensión 3 tal que $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \not\subset Z(\mathfrak{L})$. Es suma directa del álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2 con el álgebra de Lie de dimensión 1.

- $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \not\subset Z(\mathfrak{L})$.
  Sea $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_1$ tiene dimensión 2 y es no abeliana y $\mathfrak{L}_2$ tiene dimensión 1.
  $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_1' \oplus \mathfrak{L}_2' = \mathfrak{L}_1'$, enotonces $\mathfrak{L}'$ tiene dimensión 1. Además, $Z(\mathfrak{L}) = Z(\mathfrak{L}_1) \oplus Z(\mathfrak{L}_2) = \mathfrak{L}_2$, entonces $\mathfrak{L}'$ no está contenido en $Z(\mathfrak{L})$.

  A menos de isomorfismo, es la única álgebra de Lie con estas propiedades.

Teorema

Existe una única álgebra de Lie sobre $\mathbb{k}$ de dimensión 3 tal que $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \not\subset Z(\mathfrak{L})$. Es suma directa del álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2 con el álgebra de Lie de dimensión 1.

Álgebras de Lie de dimensión 3

- $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \not\subset Z(\mathfrak{L})$.
  Sea $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_1$ tiene dimensión 2 y es no abeliana y $\mathfrak{L}_2$ tiene dimensión 1.
  $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_1' \oplus \mathfrak{L}_2' = \mathfrak{L}_1'$, enotonces $\mathfrak{L}'$ tiene dimensión 1. Además, $Z(\mathfrak{L}) = Z(\mathfrak{L}_1) \oplus Z(\mathfrak{L}_2) = \mathfrak{L}_2$, entonces $\mathfrak{L}'$ no está contenido en $Z(\mathfrak{L})$.

  A menos de isomorfismo, es la única álgebra de Lie con estas propiedades.

Teorema

Existe una única álgebra de Lie sobre $\Bbbk$ de dimensión 3 tal que $\dim \mathfrak{L}' = 1$ y $\mathfrak{L}' \not\subset Z(\mathfrak{L})$. Es suma directa del álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2 con el álgebra de Lie de dimensión 1.

Demostración

Sea $0 \neq x \in \mathfrak{L}'$, con $x \notin Z(\mathfrak{L}) \Rightarrow \exists y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0$.

Afirmación 1: Si $x, y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0 \Rightarrow \{x, y\}$ es LI sobre $\Bbbk$.

x genera a $\mathfrak{L}' \Rightarrow [x, y]$ es múltiplo de x. Podemos asumir que $[x, y] = x$. Extendemos $\{x, y\}$ a $\{x, y, w\}$ base de $\mathfrak{L}$. Nuevamente, como x genera a $\mathfrak{L}'$ $\exists a, b \in \Bbbk$: $[x, w] = ax, \quad [y, w] = bx$.

Afirmación 2: $\mathfrak{L}$ contiene un elemento central no nulo z que no está en el subespacio generado por x e y:

sea $z = \lambda x + \mu y + \nu w \in \mathfrak{L}$ entonces

$[x, z] = [x, \lambda x + \mu y + \nu w] = \mu[x, y] + \nu[x, w] = \mu x + \nu a x,$

$[y, z] = [y, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[y, x] + \nu[y, w] = -\lambda x + \nu b x,$

$[w, z] = [w, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[w, x] + \mu[w, y] = -\lambda a x - \mu b x.$

Si tomamos $\lambda = b$, $\mu = -a$ y $\nu = 1$ tenemos

$[x, z] = [y, z] = [w, z] = 0$ y $z \notin \operatorname{span}\{x, y\}$.

$\Rightarrow \mathfrak{L} = \operatorname{spam}\{x, y\} \oplus \operatorname{span}\{z\}$ suma directa de álgebras de Lie de la forma requerida.

Demostración

Sea $0 \neq x \in \mathfrak{L}'$, con $x \notin Z(\mathfrak{L}) \Rightarrow \exists y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0$.
Afirmación 1: Si $x, y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0 \Rightarrow \{x, y\}$ es LI sobre $\mathbb{k}$.

x genera a $\mathfrak{L}' \Rightarrow [x, y]$ es múltiplo de x. Podemos asumir que $[x, y] = x$. Extendemos $\{x, y\}$ a $\{x, y, w\}$ base de $\mathfrak{L}$. Nuevamente, como x genera a $\mathfrak{L}'$ $\exists a, b \in \mathbb{k}$: $[x, w] = ax, \quad [y, w] = bx$.

Afirmación 2: $\mathfrak{L}$ contiene un elemento central no nulo z que no está en el subespacio generado por x e y:
sea $z = \lambda x + \mu y + \nu w \in \mathfrak{L}$ entonces
$[x, z] = [x, \lambda x + \mu y + \nu w] = \mu[x, y] + \nu[x, w] = \mu x + \nu ax$,
$[y, z] = [y, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[y, x] + \nu[y, w] = -\lambda x + \nu bx$,
$[w, z] = [w, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[w, x] + \mu[w, y] = -\lambda ax - \mu bx$.
Si tomamos $\lambda = b$, $\mu = -a$ y $\nu = 1$ tenemos
$[x, z] = [y, z] = [w, z] = 0$ y $z \notin \mathrm{span}\{x, y\}$.
$\Rightarrow \mathfrak{L} = \mathrm{spam}\{x, y\} \oplus \mathrm{span}\{z\}$ suma directa de álgebras de Lie de la forma requerida.

Demostración

Sea $0 \neq x \in \mathfrak{L}'$, con $x \notin Z(\mathfrak{L}) \Rightarrow \exists y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0$.
Afirmación 1: Si $x, y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0 \Rightarrow \{x, y\}$ es LI sobre $\mathbb{k}$.

x genera a $\mathfrak{L}' \Rightarrow [x, y]$ es múltiplo de x. Podemos asumir que $[x, y] = x$. Extendemos $\{x, y\}$ a $\{x, y, w\}$ base de $\mathfrak{L}$. Nuevamente, como x genera a $\mathfrak{L}'$ $\exists a, b \in \mathbb{k}$: $[x, w] = ax, \quad [y, w] = bx$.
Afirmación 2: $\mathfrak{L}$ contiene un elemento central no nulo z que no está en el subespacio generado por x e y:
sea $z = \lambda x + \mu y + \nu w \in \mathfrak{L}$ entonces
$[x, z] = [x, \lambda x + \mu y + \nu w] = \mu[x, y] + \nu[x, w] = \mu x + \nu a x$,
$[y, z] = [y, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[y, x] + \nu[y, w] = -\lambda x + \nu b x$,
$[w, z] = [w, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[w, x] + \mu[w, y] = -\lambda a x - \mu b x$.
Si tomamos $\lambda = b$, $\mu = -a$ y $\nu = 1$ tenemos
$[x, z] = [y, z] = [w, z] = 0$ y $z \notin \operatorname{span}\{x, y\}$.
$\Rightarrow \mathfrak{L} = \operatorname{spam}\{x, y\} \oplus \operatorname{span}\{z\}$ suma directa de álgebras de Lie de la forma requerida.

Demostración

Sea $0 \neq x \in \mathfrak{L}'$, con $x \notin Z(\mathfrak{L}) \Rightarrow \exists y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0$.
Afirmación 1: Si $x, y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0 \Rightarrow \{x, y\}$ es LI sobre $\mathbb{k}$.

x genera a $\mathfrak{L}' \Rightarrow [x, y]$ es múltiplo de x. Podemos asumir que $[x, y] = x$. Extendemos $\{x, y\}$ a $\{x, y, w\}$ base de $\mathfrak{L}$. Nuevamente, como x genera a $\mathfrak{L}'$ $\exists a, b \in \mathbb{k}$: $[x, w] = ax, \quad [y, w] = bx$.
Afirmación 2: $\mathfrak{L}$ contiene un elemento central no nulo z que no está en el subespacio generado por x e y:
sea $z = \lambda x + \mu y + \nu w \in \mathfrak{L}$ entonces
$[x, z] = [x, \lambda x + \mu y + \nu w] = \mu[x, y] + \nu[x, w] = \mu x + \nu a x$,
$[y, z] = [y, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[y, x] + \nu[y, w] = -\lambda x + \nu b x$,
$[w, z] = [w, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[w, x] + \mu[w, y] = -\lambda a x - \mu b x$.
Si tomamos $\lambda = b$, $\mu = -a$ y $\nu = 1$ tenemos
$[x, z] = [y, z] = [w, z] = 0$ y $z \notin \mathrm{span}\{x, y\}$.
$\Rightarrow \mathfrak{L} = \mathrm{spam}\{x, y\} \oplus \mathrm{span}\{z\}$ suma directa de álgebras de Lie de la forma requerida.

Demostración

Sea $0 \neq x \in \mathfrak{L}'$, con $x \notin Z(\mathfrak{L}) \Rightarrow \exists y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0$.
Afirmación 1: Si $x, y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0 \Rightarrow \{x, y\}$ es LI sobre $\Bbbk$.

x genera a $\mathfrak{L}' \Rightarrow [x, y]$ es múltiplo de x. Podemos asumir que $[x, y] = x$. Extendemos $\{x, y\}$ a $\{x, y, w\}$ base de $\mathfrak{L}$. Nuevamente, como x genera a $\mathfrak{L}'$ $\exists a, b \in \Bbbk$: $[x, w] = ax, \quad [y, w] = bx$.
Afirmación 2: $\mathfrak{L}$ contiene un elemento central no nulo z que no está en el subespacio generado por x e y:
sea $z = \lambda x + \mu y + \nu w \in \mathfrak{L}$ entonces
$[x, z] = [x, \lambda x + \mu y + \nu w] = \mu[x, y] + \nu[x, w] = \mu x + \nu ax$,
$[y, z] = [y, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[y, x] + \nu[y, w] = -\lambda x + \nu bx$,
$[w, z] = [w, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[w, x] + \mu[w, y] = -\lambda ax - \mu bx$.
Si tomamos $\lambda = b$, $\mu = -a$ y $\nu = 1$ tenemos
$[x, z] = [y, z] = [w, z] = 0$ y $z \notin \operatorname{span}\{x, y\}$.
$\Rightarrow \mathfrak{L} = \operatorname{spam}\{x, y\} \oplus \operatorname{span}\{z\}$ suma directa de álgebras de Lie de la forma requerida.

Demostración

Sea $0 \neq x \in \mathfrak{L}'$, con $x \notin Z(\mathfrak{L}) \Rightarrow \exists y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0$.
Afirmación 1: Si $x, y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0 \Rightarrow \{x, y\}$ es LI sobre $\mathbb{k}$.

x genera a $\mathfrak{L}' \Rightarrow [x, y]$ es múltiplo de x. Podemos asumir que $[x, y] = x$. Extendemos $\{x, y\}$ a $\{x, y, w\}$ base de $\mathfrak{L}$. Nuevamente, como x genera a $\mathfrak{L}'$ $\exists a, b \in \mathbb{k}$: $[x, w] = ax, \quad [y, w] = bx$.
Afirmación 2: $\mathfrak{L}$ contiene un elemento central no nulo z que no está en el subespacio generado por x e y:
sea $z = \lambda x + \mu y + \nu w \in \mathfrak{L}$ entonces
$[x, z] = [x, \lambda x + \mu y + \nu w] = \mu[x, y] + \nu[x, w] = \mu x + \nu ax$,
$[y, z] = [y, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[y, x] + \nu[y, w] = -\lambda x + \nu bx$,
$[w, z] = [w, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[w, x] + \mu[w, y] = -\lambda ax - \mu bx$.
Si tomamos $\lambda = b$, $\mu = -a$ y $\nu = 1$ tenemos
$[x, z] = [y, z] = [w, z] = 0$ y $z \notin \operatorname{span}\{x, y\}$.
$\Rightarrow \mathfrak{L} = \operatorname{spam}\{x, y\} \oplus \operatorname{span}\{z\}$ suma directa de álgebras de Lie de la forma requerida.

Demostración

Sea $0 \neq x \in \mathfrak{L}'$, con $x \notin Z(\mathfrak{L}) \Rightarrow \exists y \in \mathfrak{L}$: $[x,y] \neq 0$.
Afirmación 1: Si $x, y \in \mathfrak{L}$: $[x,y] \neq 0 \Rightarrow \{x,y\}$ es LI sobre $\Bbbk$.

x genera a $\mathfrak{L}' \Rightarrow [x,y]$ es múltiplo de x. Podemos asumir que $[x,y] = x$. Extendemos $\{x,y\}$ a $\{x,y,w\}$ base de $\mathfrak{L}$. Nuevamente, como x genera a $\mathfrak{L}'$ $\exists a, b \in \Bbbk$: $[x,w] = ax, \quad [y,w] = bx$.
Afirmación 2: $\mathfrak{L}$ contiene un elemento central no nulo z que no está en el subespacio generado por x e y:
sea $z = \lambda x + \mu y + \nu w \in \mathfrak{L}$ entonces
$[x,z] = [x, \lambda x + \mu y + \nu w] = \mu[x,y] + \nu[x,w] = \mu x + \nu a x,$
$[y,z] = [y, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[y,x] + \nu[y,w] = -\lambda x + \nu b x,$
$[w,z] = [w, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[w,x] + \mu[w,y] = -\lambda a x - \mu b x.$
Si tomamos $\lambda = b$, $\mu = -a$ y $\nu = 1$ tenemos
$[x,z] = [y,z] = [w,z] = 0$ y $z \notin \operatorname{span}\{x,y\}$.
$\Rightarrow \mathfrak{L} = \operatorname{spam}\{x,y\} \oplus \operatorname{span}\{z\}$ suma directa de álgebras de Lie de la forma requerida.

Demostración

Sea $0 \neq x \in \mathfrak{L}'$, con $x \notin Z(\mathfrak{L}) \Rightarrow \exists y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0$.
Afirmación 1: Si $x, y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0 \Rightarrow \{x, y\}$ es LI sobre $\Bbbk$.

x genera a $\mathfrak{L}' \Rightarrow [x, y]$ es múltiplo de x. Podemos asumir que $[x, y] = x$. Extendemos $\{x, y\}$ a $\{x, y, w\}$ base de $\mathfrak{L}$. Nuevamente, como x genera a $\mathfrak{L}'$ $\exists a, b \in \Bbbk$: $[x, w] = ax, \quad [y, w] = bx$.
Afirmación 2: $\mathfrak{L}$ contiene un elemento central no nulo z que no está en el subespacio generado por x e y:
sea $z = \lambda x + \mu y + \nu w \in \mathfrak{L}$ entonces
$[x, z] = [x, \lambda x + \mu y + \nu w] = \mu[x, y] + \nu[x, w] = \mu x + \nu a x,$
$[y, z] = [y, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[y, x] + \nu[y, w] = -\lambda x + \nu b x,$
$[w, z] = [w, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[w, x] + \mu[w, y] = -\lambda a x - \mu b x.$
Si tomamos $\lambda = b$, $\mu = -a$ y $\nu = 1$ tenemos
$[x, z] = [y, z] = [w, z] = 0$ y $z \notin \operatorname{span}\{x, y\}$.
$\Rightarrow \mathfrak{L} = \operatorname{spam}\{x, y\} \oplus \operatorname{span}\{z\}$ suma directa de álgebras de Lie de la forma requerida.

Álgebras de Lie de dimensión 3

Demostración

Sea $0 \neq x \in \mathfrak{L}'$, con $x \notin Z(\mathfrak{L}) \Rightarrow \exists y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0$.
Afirmación 1: Si $x, y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0 \Rightarrow \{x, y\}$ es LI sobre $\Bbbk$.

x genera a $\mathfrak{L}' \Rightarrow [x, y]$ es múltiplo de x. Podemos asumir que $[x, y] = x$. Extendemos $\{x, y\}$ a $\{x, y, w\}$ base de $\mathfrak{L}$. Nuevamente, como x genera a $\mathfrak{L}'$ $\exists a, b \in \Bbbk$: $[x, w] = ax, \quad [y, w] = bx$.
Afirmación 2: $\mathfrak{L}$ contiene un elemento central no nulo z que no está en el subespacio generado por x e y:
sea $z = \lambda x + \mu y + \nu w \in \mathfrak{L}$ entonces
$[x, z] = [x, \lambda x + \mu y + \nu w] = \mu[x, y] + \nu[x, w] = \mu x + \nu a x$,
$[y, z] = [y, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[y, x] + \nu[y, w] = -\lambda x + \nu b x$,
$[w, z] = [w, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[w, x] + \mu[w, y] = -\lambda a x - \mu b x$.
Si tomamos $\lambda = b$, $\mu = -a$ y $\nu = 1$ tenemos
$[x, z] = [y, z] = [w, z] = 0$ y $z \notin \operatorname{span}\{x, y\}$.
$\Rightarrow \mathfrak{L} = \operatorname{spam}\{x, y\} \oplus \operatorname{span}\{z\}$ suma directa de álgebras de Lie de la forma requerida.

Demostración

Sea $0 \neq x \in \mathfrak{L}'$, con $x \notin Z(\mathfrak{L}) \Rightarrow \exists y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0$.
Afirmación 1: Si $x, y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0 \Rightarrow \{x, y\}$ es LI sobre $\mathbb{k}$.

x genera a $\mathfrak{L}' \Rightarrow [x, y]$ es múltiplo de x. Podemos asumir que $[x, y] = x$. Extendemos $\{x, y\}$ a $\{x, y, w\}$ base de $\mathfrak{L}$. Nuevamente, como x genera a $\mathfrak{L}'$ $\exists a, b \in \mathbb{k}$: $[x, w] = ax, \quad [y, w] = bx$.
Afirmación 2: $\mathfrak{L}$ contiene un elemento central no nulo z que no está en el subespacio generado por x e y:
sea $z = \lambda x + \mu y + \nu w \in \mathfrak{L}$ entonces
$[x, z] = [x, \lambda x + \mu y + \nu w] = \mu[x, y] + \nu[x, w] = \mu x + \nu a x$,
$[y, z] = [y, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[y, x] + \nu[y, w] = -\lambda x + \nu b x$,
$[w, z] = [w, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[w, x] + \mu[w, y] = -\lambda a x - \mu b x$.
Si tomamos $\lambda = b$, $\mu = -a$ y $\nu = 1$ tenemos
$[x, z] = [y, z] = [w, z] = 0$ y $z \notin \mathrm{span}\{x, y\}$.
$\Rightarrow \mathfrak{L} = \mathrm{spam}\{x, y\} \oplus \mathrm{span}\{z\}$ suma directa de álgebras de Lie de la forma requerida.

Demostración

Sea $0 \neq x \in \mathfrak{L}'$, con $x \notin Z(\mathfrak{L}) \Rightarrow \exists y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0$.
Afirmación 1: Si $x, y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0 \Rightarrow \{x, y\}$ es LI sobre $\mathbb{k}$.

x genera a $\mathfrak{L}' \Rightarrow [x, y]$ es múltiplo de x. Podemos asumir que $[x, y] = x$. Extendemos $\{x, y\}$ a $\{x, y, w\}$ base de $\mathfrak{L}$. Nuevamente, como x genera a $\mathfrak{L}'$ $\exists a, b \in \mathbb{k}$: $[x, w] = ax, \quad [y, w] = bx$.
Afirmación 2: $\mathfrak{L}$ contiene un elemento central no nulo z que no está en el subespacio generado por x e y:
sea $z = \lambda x + \mu y + \nu w \in \mathfrak{L}$ entonces
$[x, z] = [x, \lambda x + \mu y + \nu w] = \mu[x, y] + \nu[x, w] = \mu x + \nu ax$,
$[y, z] = [y, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[y, x] + \nu[y, w] = -\lambda x + \nu bx$,
$[w, z] = [w, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[w, x] + \mu[w, y] = -\lambda ax - \mu bx$.
Si tomamos $\lambda = b$, $\mu = -a$ y $\nu = 1$ tenemos
$[x, z] = [y, z] = [w, z] = 0$ y $z \notin \mathrm{span}\{x, y\}$.
$\Rightarrow \mathfrak{L} = \mathrm{spam}\{x, y\} \oplus \mathrm{span}\{z\}$ suma directa de álgebras de Lie de la forma requerida.

Demostración

Sea $0 \neq x \in \mathfrak{L}'$, con $x \notin Z(\mathfrak{L}) \Rightarrow \exists y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0$.
Afirmación 1: Si $x, y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0 \Rightarrow \{x, y\}$ es LI sobre $\mathbb{k}$.

x genera a $\mathfrak{L}' \Rightarrow [x, y]$ es múltiplo de x. Podemos asumir que $[x, y] = x$. Extendemos $\{x, y\}$ a $\{x, y, w\}$ base de $\mathfrak{L}$. Nuevamente, como x genera a $\mathfrak{L}'$ $\exists a, b \in \mathbb{k}$: $[x, w] = ax, \quad [y, w] = bx$.
Afirmación 2: $\mathfrak{L}$ contiene un elemento central no nulo z que no está en el subespacio generado por x e y:
sea $z = \lambda x + \mu y + \nu w \in \mathfrak{L}$ entonces
$[x, z] = [x, \lambda x + \mu y + \nu w] = \mu[x, y] + \nu[x, w] = \mu x + \nu ax$,
$[y, z] = [y, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[y, x] + \nu[y, w] = -\lambda x + \nu bx$,
$[w, z] = [w, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[w, x] + \mu[w, y] = -\lambda ax - \mu bx$.
Si tomamos $\lambda = b$, $\mu = -a$ y $\nu = 1$ tenemos
$[x, z] = [y, z] = [w, z] = 0$ y $z \notin \mathrm{span}\{x, y\}$.
$\Rightarrow \mathfrak{L} = \mathrm{spam}\{x, y\} \oplus \mathrm{span}\{z\}$ suma directa de álgebras de Lie de la forma requerida.

Álgebras de Lie de dimensión 3

Demostración

Sea $0 \neq x \in \mathfrak{L}'$, con $x \notin Z(\mathfrak{L}) \Rightarrow \exists y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0$.
Afirmación 1: Si $x, y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0 \Rightarrow \{x, y\}$ es LI sobre $\Bbbk$.

x genera a $\mathfrak{L}' \Rightarrow [x, y]$ es múltiplo de x. Podemos asumir que $[x, y] = x$. Extendemos $\{x, y\}$ a $\{x, y, w\}$ base de $\mathfrak{L}$. Nuevamente, como x genera a $\mathfrak{L}'$ $\exists a, b \in \Bbbk$: $[x, w] = ax, \quad [y, w] = bx$.
Afirmación 2: $\mathfrak{L}$ contiene un elemento central no nulo z que no está en el subespacio generado por x e y:
sea $z = \lambda x + \mu y + \nu w \in \mathfrak{L}$ entonces

$[x, z] = [x, \lambda x + \mu y + \nu w] = \mu[x, y] + \nu[x, w] = \mu x + \nu ax,$
$[y, z] = [y, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[y, x] + \nu[y, w] = -\lambda x + \nu bx,$
$[w, z] = [w, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[w, x] + \mu[w, y] = -\lambda ax - \mu bx.$

Si tomamos $\lambda = b$, $\mu = -a$ y $\nu = 1$ tenemos
$[x, z] = [y, z] = [w, z] = 0$ y $z \notin \operatorname{span}\{x, y\}$.
$\Rightarrow \mathfrak{L} = \operatorname{spam}\{x, y\} \oplus \operatorname{span}\{z\}$ suma directa de álgebras de Lie de la forma requerida.

Álgebras de Lie de dimensión 3

Demostración

Sea $0 \neq x \in \mathfrak{L}'$, con $x \notin Z(\mathfrak{L}) \Rightarrow \exists y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0$.
Afirmación 1: Si $x, y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0 \Rightarrow \{x, y\}$ es LI sobre $\mathbb{k}$.

x genera a $\mathfrak{L}' \Rightarrow [x, y]$ es múltiplo de x. Podemos asumir que $[x, y] = x$. Extendemos $\{x, y\}$ a $\{x, y, w\}$ base de $\mathfrak{L}$. Nuevamente, como x genera a $\mathfrak{L}'$ $\exists a, b \in \mathbb{k}$: $[x, w] = ax, \quad [y, w] = bx$.
Afirmación 2: $\mathfrak{L}$ contiene un elemento central no nulo z que no está en el subespacio generado por x e y:
sea $z = \lambda x + \mu y + \nu w \in \mathfrak{L}$ entonces
$[x, z] = [x, \lambda x + \mu y + \nu w] = \mu[x, y] + \nu[x, w] = \mu x + \nu ax$,
$[y, z] = [y, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[y, x] + \nu[y, w] = -\lambda x + \nu bx$,
$[w, z] = [w, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[w, x] + \mu[w, y] = -\lambda ax - \mu bx$.
Si tomamos $\lambda = b$, $\mu = -a$ y $\nu = 1$ tenemos
$[x, z] = [y, z] = [w, z] = 0$ y $z \notin \text{span}\{x, y\}$.
$\Rightarrow \mathfrak{L} = \text{spam}\{x, y\} \oplus \text{span}\{z\}$ suma directa de álgebras de Lie de la forma requerida.

Demostración

Sea $0 \neq x \in \mathfrak{L}'$, con $x \notin Z(\mathfrak{L}) \Rightarrow \exists y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0$.
Afirmación 1: Si $x, y \in \mathfrak{L}$: $[x, y] \neq 0 \Rightarrow \{x, y\}$ es LI sobre $\mathbb{k}$.

x genera a $\mathfrak{L}' \Rightarrow [x, y]$ es múltiplo de x. Podemos asumir que $[x, y] = x$. Extendemos $\{x, y\}$ a $\{x, y, w\}$ base de $\mathfrak{L}$. Nuevamente, como x genera a $\mathfrak{L}'$ $\exists a, b \in \mathbb{k}$: $[x, w] = ax, \quad [y, w] = bx$.
Afirmación 2: $\mathfrak{L}$ contiene un elemento central no nulo z que no está en el subespacio generado por x e y:
sea $z = \lambda x + \mu y + \nu w \in \mathfrak{L}$ entonces
$[x, z] = [x, \lambda x + \mu y + \nu w] = \mu[x, y] + \nu[x, w] = \mu x + \nu a x,$
$[y, z] = [y, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[y, x] + \nu[y, w] = -\lambda x + \nu b x,$
$[w, z] = [w, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[w, x] + \mu[w, y] = -\lambda a x - \mu b x.$
Si tomamos $\lambda = b$, $\mu = -a$ y $\nu = 1$ tenemos
$[x, z] = [y, z] = [w, z] = 0$ y $z \notin \operatorname{span}\{x, y\}$.
$\Rightarrow \mathfrak{L} = \operatorname{spam}\{x, y\} \oplus \operatorname{span}\{z\}$ suma directa de álgebras de Lie de la forma requerida.

Álgebras de Lie de dimensión 3

- $\dim \mathfrak{L} = 3$ y $\dim \mathfrak{L}' = 2$.

  Sobre $\mathbb{C}$ hay infinitas de estas álgebras de Lie no isomorfas.

  Tomemos una base de $\mathfrak{L}'$, $\{y, z\}$ y extendamos a una base de $\mathfrak{L}$, $\{x, y, z\}$.

Lema

(a) *$\mathfrak{L}'$ es abeliana.*

(b) *El mapa* $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ *es un isomorfismo.*

Demostración

(a) Basta probar que $[y, z] = 0$: $[y, z] \in \mathfrak{L}' \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \Bbbk$: $[y, z] = \alpha y + \beta z$.
La matriz de $\operatorname{ad} y$ con respecto a la base $\{x, y, z\}$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & \alpha \\ * & 0 & \beta \end{pmatrix} : \; * \in \Bbbk$$

Álgebras de Lie de dimensión 3

- $\dim \mathfrak{L} = 3$ y $\dim \mathfrak{L}' = 2$.
  Sobre $\mathbb{C}$ hay infinitas de estas álgebras de Lie no isomorfas.

  Tomemos una base de $\mathfrak{L}'$, $\{y, z\}$ y extendamos a una base de $\mathfrak{L}$, $\{x, y, z\}$.

Lema

(a) *$\mathfrak{L}'$ es abeliana.*

(b) *El mapa* $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ *es un isomorfismo.*

Demostración

(a) Basta probar que $[y, z] = 0$: $[y, z] \in \mathfrak{L}' \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{k}$: $[y, z] = \alpha y + \beta z$.
La matriz de $\operatorname{ad} y$ con respecto a la base $\{x, y, z\}$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & \alpha \\ * & 0 & \beta \end{pmatrix} : * \in \mathbb{k}$$

Álgebras de Lie de dimensión 3

- $\dim \mathfrak{L} = 3$ y $\dim \mathfrak{L}' = 2$.
  Sobre $\mathbb{C}$ hay infinitas de estas álgebras de Lie no isomorfas.

  Tomemos una base de $\mathfrak{L}'$, $\{y, z\}$ y extendamos a una base de $\mathfrak{L}$, $\{x, y, z\}$.

Lema

(a) *$\mathfrak{L}'$ es abeliana.*

(b) *El mapa $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ es un isomorfismo.*

Demostración

(a) Basta probar que $[y, z] = 0$: $[y, z] \in \mathfrak{L}' \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{k}$: $[y, z] = \alpha y + \beta z$.
La matriz de $\operatorname{ad} y$ con respecto a la base $\{x, y, z\}$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & \alpha \\ * & 0 & \beta \end{pmatrix} : \ * \in \mathbb{k}$$

- $\dim \mathfrak{L} = 3$ y $\dim \mathfrak{L}' = 2$.
  Sobre $\mathbb{C}$ hay infinitas de estas álgebras de Lie no isomorfas.

  Tomemos una base de $\mathfrak{L}'$, $\{y, z\}$ y extendamos a una base de $\mathfrak{L}$, $\{x, y, z\}$.

Lema

(a) *$\mathfrak{L}'$ es abeliana.*

(b) *El mapa $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ es un isomorfismo.*

Demostración

(a) Basta probar que $[y, z] = 0$: $[y, z] \in \mathfrak{L}' \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \Bbbk$: $[y, z] = \alpha y + \beta z$.
La matriz de $\operatorname{ad} y$ con respecto a la base $\{x, y, z\}$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & \alpha \\ * & 0 & \beta \end{pmatrix} : \ * \in \Bbbk$$

- $\dim \mathfrak{L} = 3$ y $\dim \mathfrak{L}' = 2$.
  Sobre $\mathbb{C}$ hay infinitas de estas álgebras de Lie no isomorfas.

  Tomemos una base de $\mathfrak{L}'$, $\{y, z\}$ y extendamos a una base de $\mathfrak{L}$, $\{x, y, z\}$.

Lema

(a) *$\mathfrak{L}'$ es abeliana.*

(b) *El mapa $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ es un isomorfismo.*

Demostración

(a) Basta probar que $[y, z] = 0$: $[y, z] \in \mathfrak{L}' \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \Bbbk$: $[y, z] = \alpha y + \beta z$.
La matriz de $\operatorname{ad} y$ con respecto a la base $\{x, y, z\}$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & \alpha \\ * & 0 & \beta \end{pmatrix} : * \in \Bbbk$$

- $\dim \mathfrak{L} = 3$ y $\dim \mathfrak{L}' = 2$.
  Sobre $\mathbb{C}$ hay infinitas de estas álgebras de Lie no isomorfas.

  Tomemos una base de $\mathfrak{L}'$, $\{y, z\}$ y extendamos a una base de $\mathfrak{L}$, $\{x, y, z\}$.

Lema

(a) *$\mathfrak{L}'$ es abeliana.*

(b) *El mapa $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ es un isomorfismo.*

Demostración

(a) Basta probar que $[y, z] = 0$: $[y, z] \in \mathfrak{L}' \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \Bbbk$: $[y, z] = \alpha y + \beta z$.
La matriz de $\operatorname{ad} y$ con respecto a la base $\{x, y, z\}$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & \alpha \\ * & 0 & \beta \end{pmatrix} : \; * \in \Bbbk$$

- $\dim \mathfrak{L} = 3$ y $\dim \mathfrak{L}' = 2$.
  Sobre $\mathbb{C}$ hay infinitas de estas álgebras de Lie no isomorfas.

  Tomemos una base de $\mathfrak{L}'$, $\{y, z\}$ y extendamos a una base de $\mathfrak{L}$, $\{x, y, z\}$.

Lema

(a) *$\mathfrak{L}'$ es abeliana.*

(b) *El mapa $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ es un isomorfismo.*

Demostración

(a) Basta probar que $[y, z] = 0$: $[y, z] \in \mathfrak{L}' \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \Bbbk$: $[y, z] = \alpha y + \beta z$.
La matriz de $\operatorname{ad} y$ con respecto a la base $\{x, y, z\}$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & \alpha \\ * & 0 & \beta \end{pmatrix} : \; * \in \Bbbk$$

- $\dim \mathfrak{L} = 3$ y $\dim \mathfrak{L}' = 2$.
  Sobre $\mathbb{C}$ hay infinitas de estas álgebras de Lie no isomorfas.

  Tomemos una base de $\mathfrak{L}'$, $\{y, z\}$ y extendamos a una base de $\mathfrak{L}$, $\{x, y, z\}$.

Lema

(a) *$\mathfrak{L}'$ es abeliana.*

(b) *El mapa $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ es un isomorfismo.*

Demostración

(a) Basta probar que $[y, z] = 0$: $[y, z] \in \mathfrak{L}' \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \Bbbk$: $[y, z] = \alpha y + \beta z$.
La matriz de $\operatorname{ad} y$ con respecto a la base $\{x, y, z\}$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & \alpha \\ * & 0 & \beta \end{pmatrix} : * \in \Bbbk$$

- $\dim \mathfrak{L} = 3$ y $\dim \mathfrak{L}' = 2$.
  Sobre $\mathbb{C}$ hay infinitas de estas álgebras de Lie no isomorfas.

  Tomemos una base de $\mathfrak{L}'$, $\{y, z\}$ y extendamos a una base de $\mathfrak{L}$, $\{x, y, z\}$.

Lema

(a) *$\mathfrak{L}'$ es abeliana.*

(b) *El mapa $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ es un isomorfismo.*

Demostración

(a) Basta probar que $[y, z] = 0$: $[y, z] \in \mathfrak{L}' \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{k}$: $[y, z] = \alpha y + \beta z$.
La matriz de $\operatorname{ad} y$ con respecto a la base $\{x, y, z\}$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & \alpha \\ * & 0 & \beta \end{pmatrix} : * \in \mathbb{k}$$

Demostración

$y \in \mathfrak{L}' \Rightarrow \operatorname{tr}(\operatorname{ad} y) = 0$: $\operatorname{ad} : \mathfrak{L} \to \mathrm{gl}(\mathfrak{L})$ homomorfismo de álgebras de Lie, entonces

$$\operatorname{ad}[v, w] = \operatorname{ad} v \circ \operatorname{ad} w - \operatorname{ad} w \circ \operatorname{ad} v, \ \forall v, w \in \mathfrak{L}.$$

$$\Rightarrow \operatorname{tr}\big(\operatorname{ad}[v, w]\big) = \operatorname{tr}\big(\operatorname{ad} v \circ \operatorname{ad} w - \operatorname{ad} w \circ \operatorname{ad} v\big) = 0.$$

Como $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} y) = \beta$, $\beta = 0$. De igual forma, si consideramos la matriz para $\operatorname{ad} z$, $\alpha = 0$, $\Rightarrow [y, z] = 0$.

(b) $\mathfrak{L}'$ está generada por $\big\{[x, y], [x, z], [y, z]\big\}$. Como $[y, z] = 0$, $\big\{[x, y], [x, z]\big\}$ es base de $\mathfrak{L}'$. Entonces, la imagen de $\operatorname{ad} x$ tiene dimensión 2, por lo tanto $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ es un isomorfismo.

Demostración

$y \in \mathfrak{L}' \Rightarrow \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, y) = 0$: $\mathrm{ad} : \mathfrak{L} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{L})$ homomorfismo de álgebras de Lie, entonces

$$\mathrm{ad}[v, w] = \mathrm{ad}\, v \circ \mathrm{ad}\, w - \mathrm{ad}\, w \circ \mathrm{ad}\, v, \ \forall v, w \in \mathfrak{L}.$$

$$\Rightarrow \mathrm{tr}\big(\mathrm{ad}[v, w]\big) = \mathrm{tr}\big(\mathrm{ad}\, v \circ \mathrm{ad}\, w - \mathrm{ad}\, w \circ \mathrm{ad}\, v\big) = 0.$$

Como $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, y) = \beta$, $\beta = 0$. De igual forma, si consideramos la matriz para $\mathrm{ad}\, z$, $\alpha = 0$, $\Rightarrow [y, z] = 0$.

(b) $\mathfrak{L}'$ está generada por $\big\{[x, y], [x, z], [y, z]\big\}$. Como $[y, z] = 0$, $\big\{[x, y], [x, z]\big\}$ es base de $\mathfrak{L}'$. Entonces, la imagen de $\mathrm{ad}\, x$ tiene dimensión 2, por lo tanto $\mathrm{ad}\, x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ es un isomorfismo.

Demostración

$y \in \mathfrak{L}' \Rightarrow \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, y) = 0$: $\mathrm{ad} : \mathfrak{L} \to \mathrm{gl}(\mathfrak{L})$ homomorfismo de álgebras de Lie, entonces

$$\mathrm{ad}[v, w] = \mathrm{ad}\, v \circ \mathrm{ad}\, w - \mathrm{ad}\, w \circ \mathrm{ad}\, v, \ \forall v, w \in \mathfrak{L}.$$

$\Rightarrow \mathrm{tr}\big(\mathrm{ad}[v, w]\big) = \mathrm{tr}\big(\mathrm{ad}\, v \circ \mathrm{ad}\, w - \mathrm{ad}\, w \circ \mathrm{ad}\, v\big) = 0.$

Como $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, y) = \beta$, $\beta = 0$. De igual forma, si consideramos la matriz para $\mathrm{ad}\, z$, $\alpha = 0$, $\Rightarrow [y, z] = 0$.

(b) $\mathfrak{L}'$ está generada por $\big\{[x, y], [x, z], [y, z]\big\}$. Como $[y, z] = 0$, $\big\{[x, y], [x, z]\big\}$ es base de $\mathfrak{L}'$. Entonces, la imagen de $\mathrm{ad}\, x$ tiene dimensión 2, por lo tanto $\mathrm{ad}\, x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ es un isomorfismo.

Demostración

$y \in \mathfrak{L}' \Rightarrow \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, y) = 0$: $\mathrm{ad} : \mathfrak{L} \to \mathrm{gl}(\mathfrak{L})$ homomorfismo de álgebras de Lie, entonces

$$\mathrm{ad}[v, w] = \mathrm{ad}\, v \circ \mathrm{ad}\, w - \mathrm{ad}\, w \circ \mathrm{ad}\, v, \ \forall v, w \in \mathfrak{L}.$$

$$\Rightarrow \mathrm{tr}\big(\mathrm{ad}[v, w]\big) = \mathrm{tr}\big(\mathrm{ad}\, v \circ \mathrm{ad}\, w - \mathrm{ad}\, w \circ \mathrm{ad}\, v\big) = 0.$$

Como $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, y) = \beta$, $\beta = 0$. De igual forma, si consideramos la matriz para $\mathrm{ad}\, z$, $\alpha = 0$, $\Rightarrow [y, z] = 0$.

(b) $\mathfrak{L}'$ está generada por $\big\{[x, y], [x, z], [y, z]\big\}$. Como $[y, z] = 0$, $\big\{[x, y], [x, z]\big\}$ es base de $\mathfrak{L}'$. Entonces, la imagen de $\mathrm{ad}\, x$ tiene dimensión 2, por lo tanto $\mathrm{ad}\, x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ es un isomorfismo.

Demostración

$y \in \mathfrak{L}' \Rightarrow \operatorname{tr}(\operatorname{ad} y) = 0$: $\operatorname{ad} : \mathfrak{L} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{L})$ homomorfismo de álgebras de Lie, entonces

$$\operatorname{ad}[v, w] = \operatorname{ad} v \circ \operatorname{ad} w - \operatorname{ad} w \circ \operatorname{ad} v, \ \forall v, w \in \mathfrak{L}.$$

$\Rightarrow \operatorname{tr}\big(\operatorname{ad}[v, w]\big) = \operatorname{tr}\big(\operatorname{ad} v \circ \operatorname{ad} w - \operatorname{ad} w \circ \operatorname{ad} v\big) = 0.$

Como $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} y) = \beta$, $\beta = 0$. De igual forma, si consideramos la matriz para $\operatorname{ad} z$, $\alpha = 0$, $\Rightarrow [y, z] = 0$.

(b) $\mathfrak{L}'$ está generada por $\big\{[x, y], [x, z], [y, z]\big\}$. Como $[y, z] = 0$, $\big\{[x, y], [x, z]\big\}$ es base de $\mathfrak{L}'$. Entonces, la imagen de $\operatorname{ad} x$ tiene dimensión 2, por lo tanto $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ es un isomorfismo.

Demostración

$y \in \mathfrak{L}' \Rightarrow \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, y) = 0$: $\mathrm{ad} : \mathfrak{L} \to \mathrm{gl}(\mathfrak{L})$ homomorfismo de álgebras de Lie, entonces

$$\mathrm{ad}[v, w] = \mathrm{ad}\, v \circ \mathrm{ad}\, w - \mathrm{ad}\, w \circ \mathrm{ad}\, v, \ \forall v, w \in \mathfrak{L}.$$

$\Rightarrow \mathrm{tr}\big(\mathrm{ad}[v, w]\big) = \mathrm{tr}\big(\mathrm{ad}\, v \circ \mathrm{ad}\, w - \mathrm{ad}\, w \circ \mathrm{ad}\, v\big) = 0.$

Como $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, y) = \beta$, $\beta = 0$. De igual forma, si consideramos la matriz para $\mathrm{ad}\, z$, $\alpha = 0$, $\Rightarrow [y, z] = 0$.

(b) $\mathfrak{L}'$ está generada por $\big\{[x, y], [x, z], [y, z]\big\}$. Como $[y, z] = 0$, $\big\{[x, y], [x, z]\big\}$ es base de $\mathfrak{L}'$. Entonces, la imagen de $\mathrm{ad}\, x$ tiene dimensión 2, por lo tanto $\mathrm{ad}\, x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ es un isomorfismo.

Demostración

$y \in \mathfrak{L}' \Rightarrow \operatorname{tr}(\operatorname{ad} y) = 0$: $\operatorname{ad} : \mathfrak{L} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{L})$ homomorfismo de álgebras de Lie, entonces

$$\operatorname{ad}[v, w] = \operatorname{ad} v \circ \operatorname{ad} w - \operatorname{ad} w \circ \operatorname{ad} v, \ \forall v, w \in \mathfrak{L}.$$

$\Rightarrow \operatorname{tr}\big(\operatorname{ad}[v, w]\big) = \operatorname{tr}\big(\operatorname{ad} v \circ \operatorname{ad} w - \operatorname{ad} w \circ \operatorname{ad} v\big) = 0.$

Como $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} y) = \beta$, $\beta = 0$. De igual forma, si consideramos la matriz para $\operatorname{ad} z$, $\alpha = 0$, $\Rightarrow [y, z] = 0$.

(b) $\mathfrak{L}'$ está generada por $\{[x, y], [x, z], [y, z]\}$. Como $[y, z] = 0$, $\{[x, y], [x, z]\}$ es base de $\mathfrak{L}'$. Entonces, la imagen de $\operatorname{ad} x$ tiene dimensión 2, por lo tanto $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ es un isomorfismo.

Demostración

$y \in \mathfrak{L}' \Rightarrow \operatorname{tr}(\operatorname{ad} y) = 0$: $\operatorname{ad} : \mathfrak{L} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{L})$ homomorfismo de álgebras de Lie, entonces

$$\operatorname{ad}[v, w] = \operatorname{ad} v \circ \operatorname{ad} w - \operatorname{ad} w \circ \operatorname{ad} v, \ \forall v, w \in \mathfrak{L}.$$

$\Rightarrow \operatorname{tr}\big(\operatorname{ad}[v, w]\big) = \operatorname{tr}\big(\operatorname{ad} v \circ \operatorname{ad} w - \operatorname{ad} w \circ \operatorname{ad} v\big) = 0.$

Como $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} y) = \beta$, $\beta = 0$. De igual forma, si consideramos la matriz para $\operatorname{ad} z$, $\alpha = 0$, $\Rightarrow [y, z] = 0$.

(b) $\mathfrak{L}'$ está generada por $\big\{[x, y], [x, z], [y, z]\big\}$. Como $[y, z] = 0$, $\big\{[x, y], [x, z]\big\}$ es base de $\mathfrak{L}'$. Entonces, la imagen de $\operatorname{ad} x$ tiene dimensión 2, por lo tanto $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ es un isomorfismo.

Demostración

$y \in \mathfrak{L}' \Rightarrow \operatorname{tr}(\operatorname{ad} y) = 0$: $\operatorname{ad} : \mathfrak{L} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{L})$ homomorfismo de álgebras de Lie, entonces

$$\operatorname{ad}[v,w] = \operatorname{ad} v \circ \operatorname{ad} w - \operatorname{ad} w \circ \operatorname{ad} v, \ \forall v, w \in \mathfrak{L}.$$

$\Rightarrow \operatorname{tr}\big(\operatorname{ad}[v,w]\big) = \operatorname{tr}\big(\operatorname{ad} v \circ \operatorname{ad} w - \operatorname{ad} w \circ \operatorname{ad} v\big) = 0.$

Como $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} y) = \beta$, $\beta = 0$. De igual forma, si consideramos la matriz para $\operatorname{ad} z$, $\alpha = 0$, $\Rightarrow [y,z] = 0$.

(b) $\mathfrak{L}'$ está generada por $\big\{[x,y],[x,z],[y,z]\big\}$. Como $[y,z] = 0$, $\big\{[x,y],[x,z]\big\}$ es base de $\mathfrak{L}'$. Entonces, la imagen de $\operatorname{ad} x$ tiene dimensión 2, por lo tanto $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ es un isomorfismo.

Demostración

$y \in \mathfrak{L}' \Rightarrow \operatorname{tr}(\operatorname{ad} y) = 0$: $\operatorname{ad} : \mathfrak{L} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{L})$ homomorfismo de álgebras de Lie, entonces

$$\operatorname{ad}[v, w] = \operatorname{ad} v \circ \operatorname{ad} w - \operatorname{ad} w \circ \operatorname{ad} v, \ \forall v, w \in \mathfrak{L}.$$

$$\Rightarrow \operatorname{tr}\big(\operatorname{ad}[v, w]\big) = \operatorname{tr}\big(\operatorname{ad} v \circ \operatorname{ad} w - \operatorname{ad} w \circ \operatorname{ad} v\big) = 0.$$

Como $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} y) = \beta$, $\beta = 0$. De igual forma, si consideramos la matriz para $\operatorname{ad} z$, $\alpha = 0$, $\Rightarrow [y, z] = 0$.

(b) $\mathfrak{L}'$ está generada por $\big\{[x, y], [x, z], [y, z]\big\}$. Como $[y, z] = 0$, $\big\{[x, y], [x, z]\big\}$ es base de $\mathfrak{L}'$. Entonces, la imagen de $\operatorname{ad} x$ tiene dimensión 2, por lo tanto $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ es un isomorfismo.

Caso 1: Existe $x \notin \mathfrak{L}'$: $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ es diagonalizable.

Sean y, z son vectores propios de $\operatorname{ad} x$, por (b) los valores propios asociados deben ser no nulos. Sea $[x, y] = \lambda y$. Podemos suponer $\lambda = 1$, (reescalando x por λ^{-1}, tenemos que $[\lambda^{-1}x, y] = y$). Con respecto a la base $\{y, z\}$ de $\mathfrak{L}'$ el mapa lineal $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ tiene matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} : \ \mu \in \mathbb{C} \text{ no nulo.}$$

Caso 1: Existe $x \notin \mathfrak{L}'$: $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ es diagonalizable.

Sean y, z son vectores propios de $\operatorname{ad} x$, por (b) los valores propios asociados deben ser no nulos. Sea $[x, y] = \lambda y$. Podemos suponer $\lambda = 1$, (reescalando x por λ^{-1}, tenemos que $[\lambda^{-1} x, y] = y$). Con respecto a la base $\{y, z\}$ de $\mathfrak{L}'$ el mapa lineal $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ tiene matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} : \ \mu \in \mathbb{C} \text{ no nulo.}$$

Caso 1: Existe $x \notin \mathfrak{L}'$: $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ es diagonalizable.

Sean y, z son vectores propios de $\operatorname{ad} x$, por (b) los valores propios asociados deben ser no nulos. Sea $[x, y] = \lambda y$. Podemos suponer $\lambda = 1$, (reescalando x por λ^{-1}, tenemos que $[\lambda^{-1} x, y] = y$). Con respecto a la base $\{y, z\}$ de $\mathfrak{L}'$ el mapa lineal $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ tiene matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} : \ \mu \in \mathbb{C} \text{ no nulo.}$$

Caso 1: Existe $x \notin \mathfrak{L}'$: $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ es diagonalizable.

Sean y, z son vectores propios de $\operatorname{ad} x$, por (b) los valores propios asociados deben ser no nulos. Sea $[x, y] = \lambda y$. Podemos suponer $\lambda = 1$, (reescalando x por λ^{-1}, tenemos que $[\lambda^{-1} x, y] = y$). Con respecto a la base $\{y, z\}$ de $\mathfrak{L}'$ el mapa lineal $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ tiene matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} : \ \mu \in \mathbb{C} \text{ no nulo.}$$

Caso 1: Existe $x \notin \mathfrak{L}'$: $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ es diagonalizable.

Sean y, z son vectores propios de $\operatorname{ad} x$, por (b) los valores propios asociados deben ser no nulos. Sea $[x, y] = \lambda y$. Podemos suponer $\lambda = 1$, (reescalando x por λ^{-1}, tenemos que $[\lambda^{-1} x, y] = y$). Con respecto a la base $\{y, z\}$ de $\mathfrak{L}'$ el mapa lineal $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ tiene matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} : \ \mu \in \mathbb{C} \text{ no nulo.}$$

Caso 1: Existe $x \notin \mathfrak{L}'$: $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ es diagonalizable.

Sean y, z son vectores propios de $\operatorname{ad} x$, por (b) los valores propios asociados deben ser no nulos. Sea $[x, y] = \lambda y$. Podemos suponer $\lambda = 1$, (reescalando x por λ^{-1}, tenemos que $[\lambda^{-1}x, y] = y$). Con respecto a la base $\{y, z\}$ de $\mathfrak{L}'$ el mapa lineal $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ tiene matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} : \ \mu \in \mathbb{C} \text{ no nulo.}$$

Lema

Sean V espacio vectorial y φ un endomorfismo de V. Si $\mathfrak{L} = V \oplus \operatorname{span}\{x\}$. Entonces, definiendo en $\mathfrak{L}$ el corchete $[y, z] = 0$ para todos $y, z \in V$, $[x, y] = \varphi(y)$ para todo $y \in V$, es un álgebra de Lie y $\dim \mathfrak{L}' = \operatorname{rango}(\varphi)$.

Si notamos por L_μ al álgebra de Lie anterior. Entonces $L_\mu \simeq L_\nu \Leftrightarrow \mu = \nu$ o $\mu = \nu^{-1}$.
Conclusión: Existen infinitas de estas álgebras de Lie no isomorfas.

Caso 2: $\forall x \notin \mathfrak{L}'$ el mapa $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ no es diagonalizable.
Sea $x \notin \mathfrak{L}'$. Como estamos trabajando sobre los complejos, $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ debe tener un vector propio, $y \in \mathfrak{L}'$. Podemos renormalizar x y asumir que $[x, y] = y$, extendemos y a $\{y, z\}$ base de $\mathfrak{L}'$.
$\Rightarrow [x, z] = \lambda y + \mu z$, con $\lambda \neq 0$ (de lo contrario $\operatorname{ad} x$ sería diagonalizable).

Lema

Sean V espacio vectorial y φ un endomorfismo de V. Si $\mathfrak{L} = V \oplus \mathrm{span}\{x\}$. Entonces, definiendo en $\mathfrak{L}$ el corchete $[y, z] = 0$ para todos $y, z \in V$, $[x, y] = \varphi(y)$ para todo $y \in V$, es un álgebra de Lie y $\dim \mathfrak{L}' = \mathrm{rango}(\varphi)$.

Si notamos por L_μ al álgebra de Lie anterior. Entonces $L_\mu \simeq L_\nu \Leftrightarrow \mu = \nu$ o $\mu = \nu^{-1}$.
Conclusión: Existen infinitas de estas álgebras de Lie no isomorfas.

Caso 2: $\forall x \notin \mathfrak{L}'$ el mapa $\mathrm{ad}\, x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ no es diagonalizable.
Sea $x \notin \mathfrak{L}'$. Como estamos trabajando sobre los complejos, $\mathrm{ad}\, x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ debe tener un vector propio, $y \in \mathfrak{L}'$. Podemos renormalizar x y asumir que $[x, y] = y$, extendemos y a $\{y, z\}$ base de $\mathfrak{L}'$.
$\Rightarrow [x, z] = \lambda y + \mu z$, con $\lambda \neq 0$ (de lo contrario $\mathrm{ad}\, x$ sería diagonalizable).

Lema

Sean V espacio vectorial y φ un endomorfismo de V. Si $\mathfrak{L} = V \oplus \text{span}\{x\}$. Entonces, definiendo en $\mathfrak{L}$ el corchete $[y, z] = 0$ para todos $y, z \in V$, $[x, y] = \varphi(y)$ para todo $y \in V$, es un álgebra de Lie y $\dim \mathfrak{L}' = \text{rango}(\varphi)$.

Si notamos por L_μ al álgebra de Lie anterior. Entonces $L_\mu \simeq L_\nu \Leftrightarrow \mu = \nu$ o $\mu = \nu^{-1}$.

Conclusión: Existen infinitas de estas álgebras de Lie no isomorfas.

Caso 2: $\forall x \notin \mathfrak{L}'$ el mapa $\text{ad}\, x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ no es diagonalizable.

Sea $x \notin \mathfrak{L}'$. Como estamos trabajando sobre los complejos, $\text{ad}\, x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ debe tener un vector propio, $y \in \mathfrak{L}'$. Podemos renormalizar x y asumir que $[x, y] = y$, extendemos y a $\{y, z\}$ base de $\mathfrak{L}'$.

$\Rightarrow [x, z] = \lambda y + \mu z$, con $\lambda \neq 0$ (de lo contrario $\text{ad}\, x$ sería diagonalizable).

Lema

Sean V espacio vectorial y φ un endomorfismo de V. Si $\mathfrak{L} = V \oplus \operatorname{span}\{x\}$. Entonces, definiendo en $\mathfrak{L}$ el corchete $[y,z] = 0$ para todos $y, z \in V$, $[x,y] = \varphi(y)$ para todo $y \in V$, es un álgebra de Lie y $\dim \mathfrak{L}' = \operatorname{rango}(\varphi)$.

Si notamos por L_μ al álgebra de Lie anterior. Entonces $L_\mu \simeq L_\nu \Leftrightarrow \mu = \nu$ o $\mu = \nu^{-1}$.

Conclusión: Existen infinitas de estas álgebras de Lie no isomorfas.

Caso 2: $\forall x \notin \mathfrak{L}'$ el mapa $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ no es diagonalizable.
Sea $x \notin \mathfrak{L}'$. Como estamos trabajando sobre los complejos, $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ debe tener un vector propio, $y \in \mathfrak{L}'$. Podemos renormalizar x y asumir que $[x,y] = y$, extendemos y a $\{y, z\}$ base de $\mathfrak{L}'$.
$\Rightarrow [x,z] = \lambda y + \mu z$, con $\lambda \neq 0$ (de lo contrario $\operatorname{ad} x$ sería diagonalizable).

Lema

Sean V espacio vectorial y φ un endomorfismo de V. Si $\mathfrak{L} = V \oplus \operatorname{span}\{x\}$. Entonces, definiendo en $\mathfrak{L}$ el corchete $[y, z] = 0$ para todos $y, z \in V$, $[x, y] = \varphi(y)$ para todo $y \in V$, es un álgebra de Lie y $\dim \mathfrak{L}' = \operatorname{rango}(\varphi)$.

Si notamos por L_μ al álgebra de Lie anterior. Entonces $L_\mu \simeq L_\nu \Leftrightarrow \mu = \nu$ o $\mu = \nu^{-1}$.

Conclusión: Existen infinitas de estas álgebras de Lie no isomorfas.

Caso 2: $\forall x \notin \mathfrak{L}'$ el mapa $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ no es diagonalizable.

Sea $x \notin \mathfrak{L}'$. Como estamos trabajando sobre los complejos, $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ debe tener un vector propio, $y \in \mathfrak{L}'$. Podemos renormalizar x y asumir que $[x, y] = y$, extendemos y a $\{y, z\}$ base de $\mathfrak{L}'$.

$\Rightarrow [x, z] = \lambda y + \mu z$, con $\lambda \neq 0$ (de lo contrario $\operatorname{ad} x$ sería diagonalizable).

Lema

Sean V espacio vectorial y φ un endomorfismo de V. Si $\mathfrak{L} = V \oplus \mathrm{span}\{x\}$. Entonces, definiendo en $\mathfrak{L}$ el corchete $[y, z] = 0$ para todos $y, z \in V$, $[x, y] = \varphi(y)$ para todo $y \in V$, es un álgebra de Lie y $\dim \mathfrak{L}' = \mathrm{rango}(\varphi)$.

Si notamos por L_μ al álgebra de Lie anterior. Entonces $L_\mu \simeq L_\nu \Leftrightarrow \mu = \nu$ o $\mu = \nu^{-1}$.
Conclusión: Existen infinitas de estas álgebras de Lie no isomorfas.

Caso 2: $\forall x \notin \mathfrak{L}'$ el mapa $\mathrm{ad}\, x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ no es diagonalizable.
Sea $x \notin \mathfrak{L}'$. Como estamos trabajando sobre los complejos, $\mathrm{ad}\, x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ debe tener un vector propio, $y \in \mathfrak{L}'$. Podemos renormalizar x y asumir que $[x, y] = y$, extendemos y a $\{y, z\}$ base de $\mathfrak{L}'$.
$\Rightarrow [x, z] = \lambda y + \mu z$, con $\lambda \neq 0$ (de lo contrario $\mathrm{ad}\, x$ sería diagonalizable).

Lema

Sean V espacio vectorial y φ un endomorfismo de V. Si $\mathfrak{L} = V \oplus \operatorname{span}\{x\}$. Entonces, definiendo en $\mathfrak{L}$ el corchete $[y, z] = 0$ para todos $y, z \in V$, $[x, y] = \varphi(y)$ para todo $y \in V$, es un álgebra de Lie y $\dim \mathfrak{L}' = \operatorname{rango}(\varphi)$.

Si notamos por L_μ al álgebra de Lie anterior. Entonces $L_\mu \simeq L_\nu \Leftrightarrow \mu = \nu$ o $\mu = \nu^{-1}$.
Conclusión: Existen infinitas de estas álgebras de Lie no isomorfas.

Caso 2: $\forall x \notin \mathfrak{L}'$ el mapa $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ no es diagonalizable.
Sea $x \notin \mathfrak{L}'$. Como estamos trabajando sobre los complejos, $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ debe tener un vector propio, $y \in \mathfrak{L}'$. Podemos renormalizar x y asumir que $[x, y] = y$, extendemos y a $\{y, z\}$ base de $\mathfrak{L}'$.
$\Rightarrow [x, z] = \lambda y + \mu z$, con $\lambda \neq 0$ (de lo contrario $\operatorname{ad} x$ sería diagonalizable).

Lema

Sean V espacio vectorial y φ un endomorfismo de V. Si $\mathfrak{L} = V \oplus \operatorname{span}\{x\}$. Entonces, definiendo en $\mathfrak{L}$ el corchete $[y, z] = 0$ para todos $y, z \in V$, $[x, y] = \varphi(y)$ para todo $y \in V$, es un álgebra de Lie y $\dim \mathfrak{L}' = \operatorname{rango}(\varphi)$.

Si notamos por L_μ al álgebra de Lie anterior. Entonces $L_\mu \simeq L_\nu \Leftrightarrow \mu = \nu$ o $\mu = \nu^{-1}$.
Conclusión: Existen infinitas de estas álgebras de Lie no isomorfas.

Caso 2: $\forall x \notin \mathfrak{L}'$ el mapa $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ no es diagonalizable.
Sea $x \notin \mathfrak{L}'$. Como estamos trabajando sobre los complejos, $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ debe tener un vector propio, $y \in \mathfrak{L}'$. Podemos renormalizar x y asumir que $[x, y] = y$, extendemos y a $\{y, z\}$ base de $\mathfrak{L}'$.
$\Rightarrow [x, z] = \lambda y + \mu z$, con $\lambda \neq 0$ (de lo contrario $\operatorname{ad} x$ sería diagonalizable).

Lema

Sean V espacio vectorial y φ un endomorfismo de V. Si $\mathfrak{L} = V \oplus \operatorname{span}\{x\}$. Entonces, definiendo en $\mathfrak{L}$ el corchete $[y, z] = 0$ para todos $y, z \in V$, $[x, y] = \varphi(y)$ para todo $y \in V$, es un álgebra de Lie y $\dim \mathfrak{L}' = \operatorname{rango}(\varphi)$.

Si notamos por L_μ al álgebra de Lie anterior. Entonces $L_\mu \simeq L_\nu \Leftrightarrow \mu = \nu$ o $\mu = \nu^{-1}$.
Conclusión: Existen infinitas de estas álgebras de Lie no isomorfas.

Caso 2: $\forall x \notin \mathfrak{L}'$ el mapa $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ no es diagonalizable.
Sea $x \notin \mathfrak{L}'$. Como estamos trabajando sobre los complejos, $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ debe tener un vector propio, $y \in \mathfrak{L}'$. Podemos renormalizar x y asumir que $[x, y] = y$, extendemos y a $\{y, z\}$ base de $\mathfrak{L}'$.

$\Rightarrow [x, z] = \lambda y + \mu z$, con $\lambda \neq 0$ (de lo contrario $\operatorname{ad} x$ sería diagonalizable).

Lema

Sean V espacio vectorial y φ un endomorfismo de V. Si $\mathfrak{L} = V \oplus \operatorname{span}\{x\}$. Entonces, definiendo en $\mathfrak{L}$ el corchete $[y, z] = 0$ para todos $y, z \in V$, $[x, y] = \varphi(y)$ para todo $y \in V$, es un álgebra de Lie y $\dim \mathfrak{L}' = \operatorname{rango}(\varphi)$.

Si notamos por L_μ al álgebra de Lie anterior. Entonces $L_\mu \simeq L_\nu \Leftrightarrow \mu = \nu$ o $\mu = \nu^{-1}$.
Conclusión: Existen infinitas de estas álgebras de Lie no isomorfas.

Caso 2: $\forall x \notin \mathfrak{L}'$ el mapa $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ no es diagonalizable.
Sea $x \notin \mathfrak{L}'$. Como estamos trabajando sobre los complejos, $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ debe tener un vector propio, $y \in \mathfrak{L}'$. Podemos renormalizar x y asumir que $[x, y] = y$, extendemos y a $\{y, z\}$ base de $\mathfrak{L}'$.
$\Rightarrow [x, z] = \lambda y + \mu z$, con $\lambda \neq 0$ (de lo contrario $\operatorname{ad} x$ sería diagonalizable).

Reescalando z podemos suponer $\lambda = 1$. Entonces la matriz asociada a $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Como A no es diagonalizable no puede tener dos valores propios diferentes, entonces $\mu = 1$.
Esto determina completamente el álgebra de Lie con las propiedades requeridas. A menos de isomorfismo tenemos una sola de estas álgebras.

Reescalando z podemos suponer $\lambda = 1$. Entonces la matriz asociada a $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Como A no es diagonalizable no puede tener dos valores propios diferentes, entonces $\mu = 1$.
Esto determina completamente el álgebra de Lie con las propiedades requeridas. A menos de isomorfismo tenemos una sola de estas álgebras.

Reescalando z podemos suponer $\lambda = 1$. Entonces la matriz asociada a $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Como A no es diagonalizable no puede tener dos valores propios diferentes, entonces $\mu = 1$.
Esto determina completamente el álgebra de Lie con las propiedades requeridas. A menos de isomorfismo tenemos una sola de estas álgebras.

Reescalando z podemos suponer $\lambda = 1$. Entonces la matriz asociada a $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Como A no es diagonalizable no puede tener dos valores propios diferentes, entonces $\mu = 1$.
Esto determina completamente el álgebra de Lie con las propiedades requeridas. A menos de isomorfismo tenemos una sola de estas álgebras.

Reescalando z podemos suponer $\lambda = 1$. Entonces la matriz asociada a $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Como A no es diagonalizable no puede tener dos valores propios diferentes, entonces $\mu = 1$.
Esto determina completamente el álgebra de Lie con las propiedades requeridas. A menos de isomorfismo tenemos una sola de estas álgebras.

Reescalando z podemos suponer $\lambda = 1$. Entonces la matriz asociada a $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Como A no es diagonalizable no puede tener dos valores propios diferentes, entonces $\mu = 1$.
Esto determina completamente el álgebra de Lie con las propiedades requeridas. A menos de isomorfismo tenemos una sola de estas álgebras.

- $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}$.
  A menos de isomorfismo $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ es la única álgebra de Lie con esta propiedad.

Paso 1: Sea $0 \neq x \in \mathfrak{L} \Rightarrow \mathrm{ad}\, x$ tiene rango 2.
Extendamos x a una base de $\mathfrak{L}$, $\{x, y, z\} \Rightarrow \mathfrak{L}'$ está generado por $\{[x,y],[x,z],[y,z]\}$, como $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$ este conjunto es LI. $\Rightarrow$ la imagen de $\mathrm{ad}\, x$ tiene por base $\{[x,y],[x,z]\}$.

Paso 2: Existe $h \in \mathfrak{L}$: $\mathrm{ad}\, h : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ tiene un vector propio con valor propio no nulo.
Sea $x \in \mathfrak{L}$ no nulo, si $\mathrm{ad}\, x$ tiene un valor propio no nulo podemos tomar $h = x$. Si $\mathrm{ad}\, x : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ no tiene valores propios no nulos, como tiene rango 2, su forma de Jordan es:

Álgebras de Lie de dimensión 3

- $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}$.
  A menos de isomorfismo $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ es la única álgebra de Lie con esta propiedad.

Paso 1: Sea $0 \neq x \in \mathfrak{L} \Rightarrow \operatorname{ad} x$ tiene rango 2.
Extendamos x a una base de $\mathfrak{L}$, $\{x, y, z\} \Rightarrow \mathfrak{L}'$ está generado por $\{[x,y],[x,z],[y,z]\}$, como $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$ este conjunto es LI. $\Rightarrow$ la imagen de $\operatorname{ad} x$ tiene por base $\{[x,y],[x,z]\}$.

Paso 2: Existe $h \in \mathfrak{L}$: $\operatorname{ad} h : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ tiene un vector propio con valor propio no nulo.
Sea $x \in \mathfrak{L}$ no nulo, si $\operatorname{ad} x$ tiene un valor propio no nulo podemos tomar $h = x$. Si $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ no tiene valores propios no nulos, como tiene rango 2, su forma de Jordan es:

- $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}$.
  A menos de isomorfismo $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ es la única álgebra de Lie con esta propiedad.

Paso 1: Sea $0 \neq x \in \mathfrak{L} \Rightarrow \operatorname{ad} x$ tiene rango 2.
Extendamos x a una base de $\mathfrak{L}$, $\{x, y, z\} \Rightarrow \mathfrak{L}'$ está generado por $\{[x,y],[x,z],[y,z]\}$, como $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$ este conjunto es LI. $\Rightarrow$ la imagen de $\operatorname{ad} x$ tiene por base $\{[x,y],[x,z]\}$.

Paso 2: Existe $h \in \mathfrak{L}$: $\operatorname{ad} h : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ tiene un vector propio con valor propio no nulo.
Sea $x \in \mathfrak{L}$ no nulo, si $\operatorname{ad} x$ tiene un valor propio no nulo podemos tomar $h = x$. Si $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ no tiene valores propios no nulos, como tiene rango 2, su forma de Jordan es:

- $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}$.
  A menos de isomorfismo $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ es la única álgebra de Lie con esta propiedad.

Paso 1: Sea $0 \neq x \in \mathfrak{L} \Rightarrow \mathrm{ad}\, x$ tiene rango 2.
Extendamos x a una base de $\mathfrak{L}$, $\{x, y, z\} \Rightarrow \mathfrak{L}'$ está generado por $\{[x, y], [x, z], [y, z]\}$, como $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$ este conjunto es LI. $\Rightarrow$ la imagen de $\mathrm{ad}\, x$ tiene por base $\{[x, y], [x, z]\}$.

Paso 2: Existe $h \in \mathfrak{L}$: $\mathrm{ad}\, h : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ tiene un vector propio con valor propio no nulo.
Sea $x \in \mathfrak{L}$ no nulo, si $\mathrm{ad}\, x$ tiene un valor propio no nulo podemos tomar $h = x$. Si $\mathrm{ad}\, x : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ no tiene valores propios no nulos, como tiene rango 2, su forma de Jordan es:

- $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}$.
  A menos de isomorfismo $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ es la única álgebra de Lie con esta propiedad.

Paso 1: Sea $0 \neq x \in \mathfrak{L} \Rightarrow \operatorname{ad} x$ tiene rango 2.
Extendamos x a una base de $\mathfrak{L}$, $\{x, y, z\}$ $\Rightarrow \mathfrak{L}'$ está generado por $\{[x, y], [x, z], [y, z]\}$, como $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$ este conjunto es LI. $\Rightarrow$ la imagen de $\operatorname{ad} x$ tiene por base $\{[x, y], [x, z]\}$.

Paso 2: Existe $h \in \mathfrak{L}$: $\operatorname{ad} h : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ tiene un vector propio con valor propio no nulo.
Sea $x \in \mathfrak{L}$ no nulo, si $\operatorname{ad} x$ tiene un valor propio no nulo podemos tomar $h = x$. Si $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ no tiene valores propios no nulos, como tiene rango 2, su forma de Jordan es:

- $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}$.
  A menos de isomorfismo $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ es la única álgebra de Lie con esta propiedad.

Paso 1: Sea $0 \neq x \in \mathfrak{L} \Rightarrow \operatorname{ad} x$ tiene rango 2.
Extendamos x a una base de $\mathfrak{L}$, $\{x, y, z\} \Rightarrow \mathfrak{L}'$ está generado por $\{[x, y], [x, z], [y, z]\}$, como $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$ este conjunto es LI. $\Rightarrow$ la imagen de $\operatorname{ad} x$ tiene por base $\{[x, y], [x, z]\}$.

Paso 2: Existe $h \in \mathfrak{L}$: $\operatorname{ad} h : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ tiene un vector propio con valor propio no nulo.
Sea $x \in \mathfrak{L}$ no nulo, si $\operatorname{ad} x$ tiene un valor propio no nulo podemos tomar $h = x$. Si $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ no tiene valores propios no nulos, como tiene rango 2, su forma de Jordan es:

- $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}$.
  A menos de isomorfismo $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ es la única álgebra de Lie con esta propiedad.

Paso 1: Sea $0 \neq x \in \mathfrak{L} \Rightarrow \operatorname{ad} x$ tiene rango 2.
Extendamos x a una base de $\mathfrak{L}$, $\{x, y, z\} \Rightarrow \mathfrak{L}'$ está generado por $\{[x, y], [x, z], [y, z]\}$, como $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$ este conjunto es LI. $\Rightarrow$ la imagen de $\operatorname{ad} x$ tiene por base $\{[x, y], [x, z]\}$.

Paso 2: Existe $h \in \mathfrak{L}$: $\operatorname{ad} h : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ tiene un vector propio con valor propio no nulo.
Sea $x \in \mathfrak{L}$ no nulo, si $\operatorname{ad} x$ tiene un valor propio no nulo podemos tomar $h = x$. Si $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ no tiene valores propios no nulos, como tiene rango 2, su forma de Jordan es:

- $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}$.
  A menos de isomorfismo $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ es la única álgebra de Lie con esta propiedad.

Paso 1: Sea $0 \neq x \in \mathfrak{L} \Rightarrow \operatorname{ad} x$ tiene rango 2.
Extendamos x a una base de $\mathfrak{L}$, $\{x, y, z\} \Rightarrow \mathfrak{L}'$ está generado por $\big\{[x,y],[x,z],[y,z]\big\}$, como $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$ este conjunto es LI. $\Rightarrow$ la imagen de $\operatorname{ad} x$ tiene por base $\big\{[x,y],[x,z]\big\}$.

Paso 2: Existe $h \in \mathfrak{L}$: $\operatorname{ad} h : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ tiene un vector propio con valor propio no nulo.
Sea $x \in \mathfrak{L}$ no nulo, si $\operatorname{ad} x$ tiene un valor propio no nulo podemos tomar $h = x$. Si $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ no tiene valores propios no nulos, como tiene rango 2, su forma de Jordan es:

- $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}$.
  A menos de isomorfismo $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ es la única álgebra de Lie con esta propiedad.

Paso 1: Sea $0 \neq x \in \mathfrak{L} \Rightarrow \operatorname{ad} x$ tiene rango 2.
Extendamos x a una base de $\mathfrak{L}$, $\{x, y, z\} \Rightarrow \mathfrak{L}'$ está generado por $\big\{[x, y], [x, z], [y, z]\big\}$, como $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$ este conjunto es LI. $\Rightarrow$ la imagen de $\operatorname{ad} x$ tiene por base $\big\{[x, y], [x, z]\big\}$.

Paso 2: Existe $h \in \mathfrak{L}$: $\operatorname{ad} h : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ tiene un vector propio con valor propio no nulo.
Sea $x \in \mathfrak{L}$ no nulo, si $\operatorname{ad} x$ tiene un valor propio no nulo podemos tomar $h = x$. Si $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ no tiene valores propios no nulos, como tiene rango 2, su forma de Jordan es:

- $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}$.
  A menos de isomorfismo $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ es la única álgebra de Lie con esta propiedad.

Paso 1: Sea $0 \neq x \in \mathfrak{L} \Rightarrow \operatorname{ad} x$ tiene rango 2.
Extendamos x a una base de $\mathfrak{L}$, $\{x, y, z\} \Rightarrow \mathfrak{L}'$ está generado por $\{[x, y], [x, z], [y, z]\}$, como $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$ este conjunto es LI. $\Rightarrow$ la imagen de $\operatorname{ad} x$ tiene por base $\{[x, y], [x, z]\}$.

Paso 2: Existe $h \in \mathfrak{L}$: $\operatorname{ad} h : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ tiene un vector propio con valor propio no nulo.
Sea $x \in \mathfrak{L}$ no nulo, si $\operatorname{ad} x$ tiene un valor propio no nulo podemos tomar $h = x$. Si $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ no tiene valores propios no nulos, como tiene rango 2, su forma de Jordan es:

- $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}$.
  A menos de isomorfismo $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ es la única álgebra de Lie con esta propiedad.

Paso 1: Sea $0 \neq x \in \mathfrak{L} \Rightarrow \operatorname{ad} x$ tiene rango 2.
Extendamos x a una base de $\mathfrak{L}$, $\{x, y, z\} \Rightarrow \mathfrak{L}'$ está generado por $\big\{[x, y], [x, z], [y, z]\big\}$, como $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$ este conjunto es LI. $\Rightarrow$ la imagen de $\operatorname{ad} x$ tiene por base $\big\{[x, y], [x, z]\big\}$.

Paso 2: Existe $h \in \mathfrak{L}$: $\operatorname{ad} h : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ tiene un vector propio con valor propio no nulo.
Sea $x \in \mathfrak{L}$ no nulo, si $\operatorname{ad} x$ tiene un valor propio no nulo podemos tomar $h = x$. Si $\operatorname{ad} x : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ no tiene valores propios no nulos, como tiene rango 2, su forma de Jordan es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \exists \ \{x, y, z\}$ base de $\mathfrak{L}$ que extiende a x: $[x, y] = x$, $[x, z] = y$.
$\Rightarrow \operatorname{ad} y$ tiene a x como vector propio asociado a -1. Entonces podemos tomar $h = y$.

Paso 3: Por los pasos anteriores podemos encontrar $h, x \in \mathfrak{L}$ tales que $[h, x] = \alpha x \neq 0$.
Como $h \in \mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$ $\operatorname{ad} h$ tiene traza nula. $\Rightarrow \operatorname{ad} h$ puede tener tres valores propios distintos, $-\alpha$, 0 y α. Si y es vector propio asociado a $-\alpha$, $\Rightarrow \{h, x, y\}$ es base de $\mathfrak{L}$. En esta base $\operatorname{ad} h$ se representa por una matriz diagonal.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \exists\ \{x, y, z\}$ base de $\mathfrak{L}$ que extiende a x: $[x, y] = x$, $[x, z] = y$.

$\Rightarrow$ ad y tiene a x como vector propio asociado a -1. Entonces podemos tomar $h = y$.

Paso 3: Por los pasos anteriores podemos encontrar $h, x \in \mathfrak{L}$ tales que $[h, x] = \alpha x \neq 0$.

Como $h \in \mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$ ad h tiene traza nula. $\Rightarrow$ ad h puede tener tres valores propios distintos, $-\alpha$, 0 y α. Si y es vector propio asociado a $-\alpha$, $\Rightarrow \{h, x, y\}$ es base de $\mathfrak{L}$. En esta base ad h se representa por una matriz diagonal.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \exists \ \{x, y, z\}$ base de $\mathfrak{L}$ que extiende a x: $[x, y] = x$, $[x, z] = y$.
$\Rightarrow$ ad y tiene a x como vector propio asociado a -1. Entonces podemos tomar $h = y$.

Paso 3: Por los pasos anteriores podemos encontrar $h, x \in \mathfrak{L}$ tales que $[h, x] = \alpha x \neq 0$.
Como $h \in \mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$ ad h tiene traza nula. $\Rightarrow$ ad h puede tener tres valores propios distintos, $-\alpha$, 0 y α. Si y es vector propio asociado a $-\alpha$, $\Rightarrow \{h, x, y\}$ es base de $\mathfrak{L}$. En esta base ad h se representa por una matriz diagonal.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \exists \; \{x, y, z\}$ base de $\mathfrak{L}$ que extiende a x: $[x, y] = x$, $[x, z] = y$.
$\Rightarrow$ ad y tiene a x como vector propio asociado a -1. Entonces podemos tomar $h = y$.

Paso 3: Por los pasos anteriores podemos encontrar $h, x \in \mathfrak{L}$ tales que $[h, x] = \alpha x \neq 0$.
Como $h \in \mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$ ad h tiene traza nula. $\Rightarrow$ ad h puede tener tres valores propios distintos, $-\alpha$, 0 y α. Si y es vector propio asociado a $-\alpha$, $\Rightarrow \{h, x, y\}$ es base de $\mathfrak{L}$. En esta base ad h se representa por una matriz diagonal.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \exists \ \{x, y, z\}$ base de $\mathfrak{L}$ que extiende a x: $[x, y] = x$, $[x, z] = y$.
$\Rightarrow$ ad y tiene a x como vector propio asociado a -1. Entonces podemos tomar $h = y$.

Paso 3: Por los pasos anteriores podemos encontrar $h, x \in \mathfrak{L}$ tales que $[h, x] = \alpha x \neq 0$.
Como $h \in \mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$ ad h tiene traza nula. $\Rightarrow$ ad h puede tener tres valores propios distintos, $-\alpha$, 0 y α. Si y es vector propio asociado a $-\alpha$, $\Rightarrow \{h, x, y\}$ es base de $\mathfrak{L}$. En esta base ad h se representa por una matriz diagonal.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \exists \ \{x, y, z\}$ base de $\mathfrak{L}$ que extiende a x: $[x, y] = x$, $[x, z] = y$.
$\Rightarrow$ ad y tiene a x como vector propio asociado a -1. Entonces podemos tomar $h = y$.

Paso 3: Por los pasos anteriores podemos encontrar $h, x \in \mathfrak{L}$ tales que $[h, x] = \alpha x \neq 0$.
Como $h \in \mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$ ad h tiene traza nula. $\Rightarrow$ ad h puede tener tres valores propios distintos, $-\alpha$, 0 y α. Si y es vector propio asociado a $-\alpha$, $\Rightarrow \{h, x, y\}$ es base de $\mathfrak{L}$. En esta base ad h se representa por una matriz diagonal.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \exists \{x, y, z\}$ base de $\mathfrak{L}$ que extiende a x: $[x, y] = x$, $[x, z] = y$.
$\Rightarrow$ ad y tiene a x como vector propio asociado a -1. Entonces podemos tomar $h = y$.

Paso 3: Por los pasos anteriores podemos encontrar $h, x \in \mathfrak{L}$ tales que $[h, x] = \alpha x \neq 0$.
Como $h \in \mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$ ad h tiene traza nula. $\Rightarrow$ ad h puede tener tres valores propios distintos, $-\alpha$, 0 y α. Si y es vector propio asociado a $-\alpha$, $\Rightarrow \{h, x, y\}$ es base de $\mathfrak{L}$. En esta base ad h se representa por una matriz diagonal.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \exists\ \{x, y, z\}$ base de $\mathfrak{L}$ que extiende a x: $[x, y] = x$, $[x, z] = y$.
$\Rightarrow$ ad y tiene a x como vector propio asociado a -1. Entonces podemos tomar $h = y$.

Paso 3: Por los pasos anteriores podemos encontrar $h, x \in \mathfrak{L}$ tales que $[h, x] = \alpha x \neq 0$.
Como $h \in \mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$ ad h tiene traza nula. $\Rightarrow$ ad h puede tener tres valores propios distintos, $-\alpha$, 0 y α. Si y es vector propio asociado a $-\alpha$, $\Rightarrow \{h, x, y\}$ es base de $\mathfrak{L}$. En esta base ad h se representa por una matriz diagonal.

Paso 4: Para completar la descripción del álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ necesitamos determinar $[x, y]$.

$$[h, [x, y]] = [[h, x], y] + [x, [h, y]] = \alpha[x, y] - \alpha[x, y] = 0.$$

Tenemos dos aplicaciones del paso 1. Primero, $N(\operatorname{ad} h) = \operatorname{span}\{h\}$, $\Rightarrow [x, y] = \lambda h$ para algún $\lambda \in \mathbb{k}$. Segundo, $\lambda \neq 0$ porque de lo contrario $N(\operatorname{ad} h)$ tendría dimensión 2. Normalizando x por $\lambda^{-1}x$ podemos suponer $\lambda = 1$.

Paso 4: Para completar la descripción del álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ necesitamos determinar $[x, y]$.

$$[h, [x, y]] = [[h, x], y] + [x, [h, y]] = \alpha[x, y] - \alpha[x, y] = 0.$$

Tenemos dos aplicaciones del paso 1. Primero, $N(\operatorname{ad} h) = \operatorname{span}\{h\}$, $\Rightarrow [x, y] = \lambda h$ para algún $\lambda \in \mathbb{k}$. Segundo, $\lambda \neq 0$ porque de lo contrario $N(\operatorname{ad} h)$ tendría dimensión 2. Normalizando x por $\lambda^{-1}x$ podemos suponer $\lambda = 1$.

Paso 4: Para completar la descripción del álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ necesitamos determinar $[x, y]$.

$$[h, [x, y]] = [[h, x], y] + [x, [h, y]] = \alpha[x, y] - \alpha[x, y] = 0.$$

Tenemos dos aplicaciones del paso 1. Primero, $N(\operatorname{ad} h) = \operatorname{span}\{h\}, \Rightarrow [x, y] = \lambda h$ para algún $\lambda \in \mathbb{k}$. Segundo, $\lambda \neq 0$ porque de lo contrario $N(\operatorname{ad} h)$ tendría dimensión 2. Normalizando x por $\lambda^{-1}x$ podemos suponer $\lambda = 1$.

Paso 4: Para completar la descripción del álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ necesitamos determinar $[x, y]$.

$$[h, [x, y]] = [[h, x], y] + [x, [h, y]] = \alpha[x, y] - \alpha[x, y] = 0.$$

Tenemos dos aplicaciones del paso 1. Primero, $N(\operatorname{ad} h) = \operatorname{span}\{h\}$, $\Rightarrow [x, y] = \lambda h$ para algún $\lambda \in \mathbb{k}$. Segundo, $\lambda \neq 0$ porque de lo contrario $N(\operatorname{ad} h)$ tendría dimensión 2. Normalizando x por $\lambda^{-1}x$ podemos suponer $\lambda = 1$.

Paso 4: Para completar la descripción del álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ necesitamos determinar $[x, y]$.

$$[h, [x, y]] = [[h, x], y] + [x, [h, y]] = \alpha[x, y] - \alpha[x, y] = 0.$$

Tenemos dos aplicaciones del paso 1. Primero, $N(\operatorname{ad} h) = \operatorname{span}\{h\}$, $\Rightarrow [x, y] = \lambda h$ para algún $\lambda \in \mathbb{k}$.
Segundo, $\lambda \neq 0$ porque de lo contrario $N(\operatorname{ad} h)$ tendría dimensión 2. Normalizando x por $\lambda^{-1}x$ podemos suponer $\lambda = 1$.

Paso 4: Para completar la descripción del álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ necesitamos determinar $[x, y]$.

$$[h, [x, y]] = [[h, x], y] + [x, [h, y]] = \alpha[x, y] - \alpha[x, y] = 0.$$

Tenemos dos aplicaciones del paso 1. Primero, $N(\operatorname{ad} h) = \operatorname{span}\{h\}$, $\Rightarrow [x, y] = \lambda h$ para algún $\lambda \in \mathbb{k}$. Segundo, $\lambda \neq 0$ porque de lo contrario $N(\operatorname{ad} h)$ tendría dimensión 2. Normalizando x por $\lambda^{-1}x$ podemos suponer $\lambda = 1$.

Paso 4: Para completar la descripción del álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ necesitamos determinar $[x, y]$.

$$[h, [x, y]] = [[h, x], y] + [x, [h, y]] = \alpha[x, y] - \alpha[x, y] = 0.$$

Tenemos dos aplicaciones del paso 1. Primero, $N(\operatorname{ad} h) = \operatorname{span}\{h\}$, $\Rightarrow [x, y] = \lambda h$ para algún $\lambda \in \mathbb{k}$.
Segundo, $\lambda \neq 0$ porque de lo contrario $N(\operatorname{ad} h)$ tendría dimensión 2. Normalizando x por $\lambda^{-1}x$ podemos suponer $\lambda = 1$.

Si sustituimos h por un múltiplo no nulo podemos tomar cualquier valor de α como queremos.

En particular si tomamos $\alpha = 2$ la estructura constante de $\mathfrak{L}$ que respeta la base $\{x, y, h\}$ coincide con la estructura constante de $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ respecto la base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Entonces $\mathfrak{L} \cong \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$. Por lo tanto, hay una única álgebra de Lie de dimensión tres que coincide con su álgebra derivada.

Si sustituimos h por un múltiplo no nulo podemos tomar cualquier valor de α como queremos.
En particular si tomamos $\alpha = 2$ la estructura constante de $\mathfrak{L}$ que respeta la base $\{x, y, h\}$ coincide con la estructura constante de $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ respecto la base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Entonces $\mathfrak{L} \cong \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$. Por lo tanto, hay una única álgebra de Lie de dimensión tres que coincide con su álgebra derivada.

Si sustituimos h por un múltiplo no nulo podemos tomar cualquier valor de α como queremos.
En particular si tomamos $\alpha = 2$ la estructura constante de $\mathfrak{L}$ que respeta la base $\{x, y, h\}$ coincide con la estructura constante de $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ respecto la base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Entonces $\mathfrak{L} \cong \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$. Por lo tanto, hay una única álgebra de Lie de dimensión tres que coincide con su álgebra derivada.