Publicaciones Matemáticas del Uruguay
Volumen XX, Xxxx XXXX, Páginas xxx–xxx
S 0797-1443

CEROS DE POLINOMIOS Y FUNCIONES ALEATORIAS

FEDERICO DALMAO

Resumen. Hacemos un breve repaso de los resultados recientes sobre el número de ceros de polinomios y ondas aleatorias y algunos problemas afines.

1. Introducción

El objetivo de este artículo es presentar algunos resultados, sobre todo los que han salido en el último lustro, vinculados a los ceros de polinomios aleatorios y, en menor medida, a las ondas aleatorias. No se incluyen resultados originales.

El estudio de los ceros de diferentes clases de funciones es sempiterno y ubicuo por lo que es difícil decir algo que realmente no sobre para enfatizar su importancia. A pesar de esto, digamos que algunos de los principales teoremas del Cálculo, como los de Bolzano y Rolle, son teoremas de existencia de raíces. El mismo Teorema Fundamental del Álgebra y su versión multivariada, el Teorema de Bézout, y el problema de hallar los valores propios de un operador lineal tratan sobre la existencia de raíces.

En estos días hay una gran actividad entorno a los ceros de funciones aleatorias que involucra a geómetras, algebristas, numeristas, probabilistas, etc. Se estudia el número de ceros (si estos son aislados) o la medida del conjunto de nivel cero (si el dominio tiene mayor dimensión que el codominio) y también se estudian otras características topológicas como el número de componentes conexas, etc.

¿Por qué pensar en funciones aleatorias? Porque es una forma de buscar resultados genéricos, que no valgan para una función concreta sino para una función típica. Una forma habitual de precisar lo típico es justamente la de elegir la función al azar y observar el comportamiento esperado. En otras palabras, el comportamiento para una función concreta puede ser muy llamativo pero quizás sea completamente atípico, después de aleatorizar no deberían observarse tales funciones.

Si la función se elige al azar, sus ceros se vuelven un conjunto aleatorio. En general es muy difícil calcular la distribución de probabilidad de las diferentes características del conjunto de ceros. Por esto usualmente se estudian características parciales como el promedio, la varianza o se estudian los límites cuando algún parámetro de interés tiende a infinito.

Uno puede poner al número de ceros en un marco clásico de la siguiente manera, si se toma una partición del dominio en subconjuntos disjuntos, el número de ceros global es la suma del número de ceros sobre cada subconjunto de la partición, así el número de ceros se puede escribir como una suma. Ya en poder de una suma de variables aleatorias uno se puede preguntar por ejemplo por un teorema central del límite. Sin embargo, las variables en una suma de este tipo son en general dependientes.

En este trabajo nos preocupamos acerca de dos tipos de funciones, los polinomios y las ondas aleatorias y estudiamos principalmente sus ceros reales. Ambas clases de funciones se pueden escribir como una combinación (posiblemente infinita) de ciertas funciones básicas, es decir, son de la forma

$$f(t) = \sum_k a_k \phi_k(t).$$

En nuestros casos las funciones básicas ϕ_k son

$$t^k, \quad \cos(kt), \quad \operatorname{sen}(kt), \quad J_k(t); \qquad k = 0, 1, \ldots.$$

Aquí J_k es la función de Bessel del primer tipo y orden k.

La aleatorización se hace a través de los coeficientes a_k de la combinación, es decir, se toma a estos coeficientes como variables aleatorias. A veces, conviene pensar una función de la forma anterior como un proceso estocástico. Es decir, como una función de dos variables (ω, t) donde la primera representa el azar y la segunda el tiempo. En particular, al fijar un instante t obtenemos una variable aleatoria y al fijar una realización ω, o sea al fijar los coeficientes, obtenemos una trayectoria.

Como siempre, resulta que tomar coeficientes con distribución normal facilita enormemente el trabajo y habilita al uso de una variedad de herramientas. Recién en segunda instancia se intenta extender cada resultado al mundo no gaussiano.

2. Polinomios Aleatorios

Los polinomios son las funciones más sencillas que uno se puede imaginar, en particular, para calcular su valor en un punto dado sólo son necesarias operaciones enteras (sumas y productos). Por otro lado, según el Teorema de Weierstraß, con ellos se puede aproximar tan finamente como se quiera cualquier función continua en un intervalo. Por estas y por otras razones, es natural que sean las primeras funciones a estudiar a cualquier respecto.

2.1. Polinomios algebraicos. Los primeros trabajos rigurosos sobre las raíces reales de polinomios aleatorios aparecieron en los años 30 y 40 a manos de Bloch y Pólya, Kac, Littlewood y Offord entre otros, ver el libro de Bharucha-Reid y Sambandham [14] el panorama general hasta los 80. Ellos consideraron los polinomios de Kac

$$P_d(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_d t^d,$$

siendo $a_0, \ldots, a_d$ variables aleatorias independientes con la misma distribución. Littlewood y Offord [28, 29, 30] en los 40 para coeficientes normales estándar, uniformes en $[0, 1]$ o uniformes en $\{-1, 1\}$, probaron que el número de ceros reales N_d de P_d es *polilogarítmico*; es decir que la probabilidad de

$$\alpha \frac{\log(d)}{\log(\log(d))} \leq N_d \leq \beta \log^2(d),$$

tiende a 1 cuando el grado d tiende a infinito siendo α y β constantes. En [14] se pueden encontrar generalizaciones de este resultado.

En el caso de coeficientes normales estándar, Kac [23] dio una fórmula integral para la esperanza de N_d de la forma

$$\mathbb{E}\left(N_d\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_d(t) dt,$$

siendo

$$\rho_d(t) = \frac{\sqrt{A(t)C(t) - B^2(t)}}{A(t)}; A(t) = \sum_{k=0}^{d} t^{2k}, B(t) = \sum_{k=1}^{d} kt^{2k-1}, C(t) = \sum_{k=1}^{d} k^2 t^{2k-2}.$$

Además del artículo original [23] es muy interesante leer el de Edelman y Kostlan [19] en el que se da una versión puramente geométrica cambiando el cálculo de probabilidades por el de áreas en la esfera.

Esta fórmula va más allá del número de raíces, muestra que en el eje real hay una *densidad de ceros*, ρ_d, en el sentido de cuántas raíces por unidad de longitud hay a lo largo de la recta real. Esta densidad muestra un comportamiento muy llamativo de los ceros, tanto en el caso de los reales como en el de los complejos, cuando el grado d tiende a infinito los ceros tienden a concentrarse sobre los puntos de módulo 1. Esta acumulación de los ceros no se da en otras familias de polinomios[1].

De la fórmula dada por Kac se deduce, en particular, que

$$\mathbb{E}\left(N_d\right) = \frac{2}{\pi}\log(d) + o(\log(d)).$$

Esto es bastante sorprendente, de las d raíces complejas del polinomio P_d menos de $\log(d)$ son reales en promedio. O sea, cualquier polinomio aleatorio de grado $d = 1000$ tiene mil raíces complejas y de ellas sólo 4 son reales en promedio. Si el grado escala a un millón, en promedio habrá sólo 9 raíces reales.

Unos treinta años después, Maslova [34, 35] dio la asintótica para la varianza

$$\mathbf{var}\left(N_d\right) \underset{d\to\infty}{\sim} \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \cdot \log(d)$$

y probó un Teorema Central del Límite para N_d. Esto es,

$$\frac{N_d - \mathbb{E}\left(N_d\right)}{\sqrt{\mathbf{var}\left(N_d\right)}}$$

converge en distribución a una normal estándar cuando el grado $d \to \infty$. Las hipótesis del resultado de Maslova son la independencia e igualdad en distribución de los coeficientes; que los coeficientes sean centrados[2] y que tengan algún momento de orden superior a dos (que exista $\delta > 0$ tal que $\mathbb{E}\left(|a_1|^{2+\delta}\right) < \infty$).

Estos resultados nos dan el primer ejemplo de comportamiento universal, es decir, con tal de que valga este resultado no importa cual es la distribución de los coeficientes sino únicamente que sean centrados y que cumplan la condición de momento. En realidad, la universalidad llega al primer orden de esta aproximación, Nguyen, Nguyen y Vu [36] probaron que el segundo término depende de la distribución. Esto es, existe una constante C_{dist} que depende de la distribución de los coeficientes tal que

$$\mathbb{E}\left(N_d\right) = \frac{2}{\pi}\log(d) + C_{dist} + o(1).$$

El método utilizado por Maslova se basa en la presencia de cierta repulsión entre los ceros de los polinomios que permite aproximar el número de ceros del polinomio en un intervalo por el número de cambios de signos de las trayectorias en una grilla suficientemente fina.

---

[1] En realidad, según [15], se verifica para polinomios palíndromos en el sentido de que verifiquen $\mathbf{var}\left(a_{d-k}\right) = \mathbf{var}\left(a_k\right)$ para todo k.

[2] En el caso de coeficientes a_k no centrados, probó que hay en promedio la mitad de ceros.

Se han estudiado otras formas de aleatorizar los coeficientes, obteniendo resultados principalmente en lo que concierne al número medio de raíces. Los resultados de varianza y de distribución límite son más duros. Entre los diferentes tipos de polinomios aleatorios, vale la pena destacar los llamados polinomios de Kostlan[3], en los cuales se supone que los coeficientes $a_0, \dots, a_d$ son variables aleatorias independientes, normales, centradas y tales que la varianza de a_k es igual al coeficiente binomial $\binom{d}{k}$. En este caso, se sabe desde los 90 [41] que el número medio de raíces reales es $\sqrt{d}$.

En 2015 se probó que la varianza asintótica del número de raíces es del mismo orden que la esperanza y que el número de ceros reales verifica un Teorema Central del Límite [16]. Un resultado análogo acaba de aparecer (agosto de 2017) para los polinomios de Weyl en los cuales la varianza de a_k es $1/\sqrt{k!}$, ver Do y Vu [18].

Los polinomios de Kostlan tienen una versión multivariada, esto es lo que los hace realmente especiales, ver Armentano [3]. Consideramos un sistema cuadrado $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_m) = 0$ de m ecuaciones polinomiales en m variables

$$P_\ell(t) = \sum_{|\mathbf{j}| \le d_\ell} a_{\mathbf{j}}^{(\ell)} t^{\mathbf{j}},$$

donde hemos usado multí índices

1. $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_m) \in \mathbb{N}^m$, con $|\mathbf{j}| = \sum_{k=1}^m j_k$;
2. $a_{\mathbf{b}j}^{(\ell)} = a_{j_1 \dots j_m}^{(\ell)} \in \mathbb{R}$, $\ell = 1, \dots, m$, $|\mathbf{j}| \le d$;
3. $t = (t_1, \dots, t_m)$, con $t^{\mathbf{j}} = \prod_{k=1}^m t_k^{j_k}$.

Los coeficientes $a_{\mathbf{j}}^{(\ell)}$ son normales independientes con media cero y varianzas

$$\mathbf{var}\left(a_{\mathbf{j}}^{(\ell)}\right) = \binom{d_\ell}{\mathbf{j}} = \frac{d_\ell!}{j_1! \dots j_m! (d_\ell - |\mathbf{j}|)!}.$$

La fórmula multinomial implica que la covarianza entre $P_\ell(s)$ y $P_\ell(t)$ es

$$\mathbf{cov}\left(P_\ell(s), P_\ell(t)\right) = (1 + \langle s, t \rangle)^{d_\ell},$$

siendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno usual en $\mathbb{R}^{m+1}$. Esto implica que la covarianza no cambia si aplicamos una isometría, hecho que es clave para que los cálculos sean manejables. La esperanza del número de raíces de $\mathbf{P}$ es la raiz del número de Bézout $\sqrt{d_1 \dots d_m}$, ver [41].

En el caso en que los polinomios tienen el mismo grado d, cuando $d \to \infty$, la varianza es del mismo orden que la esperanza, de forma más precisa en [5] y [27] se probó que

$$\lim_{d \to \infty} \frac{\mathbf{var}\,(N_d)}{d^{m/2}} = c \approx 0,55...$$

También se ha estudiado el caso rectangular, ver [26, 27].

En realidad, en el caso de sistemas de ecuaciones polinomiales aleatorias surge una nueva variante de estudio pues se puede considerar que el tamaño del sistema es el que crece a infinito en lugar del grado. Azaïs y Wschebor [9] y Wschebor [43] obtuvieron la varianza límite bajo este régimen.

[3]También se los conoce como polinomios elípticos, etc. Esta es la elección más natural para la distribución de los coeficientes según el propio Kostlan

2.2. Polinomios trigonométricos. Los polinomios trigonométricos son funciones de la forma

$$P_d(t) = \sum_{k=1}^{d} a_k \cos(kt), \quad t \in [0, 2\pi];$$

o, de forma simplificada

$$Q_d(t) = \sum_{k=1}^{d} a_k \cos(kt) + b_k \operatorname{sen}(kt), t \in [0, 2\pi].$$

Decimos que la versión Q_d es más simple pues tiene mejores propiedades probabilísticas. De hecho, Q_d es un proceso estocástico estacionario en sentido amplio en general y en el caso de coeficientes normales es estacionario de forma estricta. Esto simplifica en gran medida los cálculos, en particular la varianza de $Q_d(t)$ y la covarianza entre $Q_d(t)$ y $Q_d(t+s)$ no dependen de t.

Los polinomios trigonométricos son especialmente importantes en física nuclear donde los valores propios de una matriz aleatoria de gran tamaño están estrechamente vinculados con la energía del sistema, ver los detalles en [15]. Esto conduce rápidamente a preocuparse por las raíces de polinomios aleatorios (los polinomios característicos de tales matrices). El tamaño de la matriz se traduce en el grado del polinomio. Por las simetrías subyacentes al problema físico es de esperar que una gran parte de las raíces de estos polinomios se concentren alrededor del círculo unitario en el plano complejo, de ahí la idea de restringir los polinomios a puntos de la forma

$$e^{ik\theta} \equiv (\cos(kt), \operatorname{sen}(kt)).$$

Por ende, es coherente mantener el mote de polinomios para estas funciones y el de grado para d. Los primeros estudios sobre el número de ceros de los polinomios trigonométricos clásicos P_d son de los 50 y en el caso de Q_d de los 60, ver [14] y sus referencias. El número medio de raíces reales de P_d y Q_d en el caso de coeficientes normales estándar independientes, ver [14, 44], es

$$\mathbb{E}(N_d) \underset{d \to \infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{3}} d.$$

En este caso el promedio es del mismo orden que la cota determinista $2d$ y muy superior al promedio en el caso de los polinomios algebraicos. Recientemente, entre 2015 y 2016 se ha mostrado la universalidad de este resultado (al primer orden), Flasche [20], Angst y Poly [1], ver también Angst, Dalmao y Poly [2] y la sección siguiente.

También recientemente, en el caso de coeficientes normales estándar, se ha obtenido la varianza límite, ver Granville y Wigman [21], Su y Shao [42]. Cabe destacar que la varianza es del mismo orden que la esperanza. Además, Granville y Wigman [21], ver también Azaïs y León [8], y Azaïs, Dalmao y León [6] obtuvieron los Teoremas Centrales para Q_d y P_d respectivamente.

La universalidad de la distribución límite se conoce sobre intervalos de longitud $1/d$, ver [22] y [7]. Sin embargo, en el caso de la varianza asintótica, en noviembre de 2017 Bally, Caramelino y Poly [11] llegaron al muy llamativo resultado de la no universalidad. De hecho, si los coeficientes de Q_d son independientes centrados y con varianza uno, la varianza límite del número de ceros se escribe como el límite del caso normal más un término de corrección que depende de la curtosis de los coeficientes, es decir, de la diferencia entre el cuarto momento de los coeficientes y el de una normal estándar.

2.3. Coeficientes dependientes. Incluir dependencia entre los coeficientes es algo harto más díficil y en el caso trigonométrico sólo hay resultados sobre la esperanza del número de ceros.

Los primeros trabajos datan de los 80 y abarcan el caso de coeficientes igualmente distribuídos normales con covarianza constante $\rho(k) = \mathbb{E}\left(a_0 a_k\right) = \rho$ y geométrica $\rho(k) = \mathbb{E}\left(a_0 a_k\right) = \rho^k$, ver Sambandham [40], Sambandham y Renganhatan [39]. Los cálculos se basan en cotas finas para las series involucradas y son bastante específicos.

En 2017, Angst, Dalmao y Poly [2] lograron calcular el límite de la esperanza del número de ceros en el caso gaussiano pero con condiciones bastante generales sobre la dependencia de los coeficientes expresadas en términos de la densidad espectral de los coefcientes. El caso más notable incluído es cuando los coeficientes a_k son representados por incrementos sucesivos del *movimiento Browniano fraccionario*. Esto implica que se admite una *dependencia fuerte*, es decir, tal que $\sum |\rho(k)| = \infty$.

Lo sorprendente es que en todos estos casos se llega al mismo límite que en el caso de coeficientes independientes.

3. Ondas aleatorias

El estudio de las ondas, u olas, aleatorias proviene de la física y en especial de los trabajos de Longuet-Higgins [31] y Berry [13]. Aquí llamamos onda a una solución, a valores reales o complejos, de la ecuación de Helmholtz

$$\Delta f + kf = 0,$$

siendo Δ el operador de Laplace-Beltrami, simplemente Laplaciano de aquí en más. En otras palabras, las ondas son las funciones propias del Laplaciano, los valores propios k son interpretados como los niveles de energía. El interés recae sobre el comportamiento del conjunto de los ceros de estas funciones para valores propios k altos. Los ceros son interpretados como zonas de silencio o de obscuridad, etc. según qué represente la onda.

Dependiendo del dominio (en general una variedad) sobre el que se definan el Laplaciano Δ y las ondas f se presentan diferentes situaciones, aquí nos limitamos a dimensión dos. En el toro plano $\mathbb{T}_2$ o en la esfera $\mathbb{S}^2$ el espectro de Δ es puramente discreto y los valores propios tienen multiplicidad mayor a uno y se conocen de forma explícita bases de los correspondientes subespacios propios. Lo usual, es tomar una combinación con coeficientes aleatorios de estas bases y obtener así una onda aleatoria. Si el dominio es una variedad en la cual los valores propios tienen multiplicidad uno, lo usual es combinar funciones propias de diferentes valores con coeficientes aleatorios.

Para ser más precisos, en el caso del toro $\mathbb{T}_2$ los valores propios son de la forma $k = 4\pi^2 n$ siendo $n = a^2 + b^2$ para ciertos $a, b \in \mathbb{Z}$. Para n de esta forma, las funciones

$$e_{a,b}(x) = e^{2\pi i \langle (a,b), x \rangle}; \quad a^2 + b^2 = n$$

forman una base ortonormal del subespacio propio correspondiente al valor $4\pi^2 n$. En este caso, tomando coeficientes complejos $c_{a,b}$ independientes normales estándar[4]

[4]Esto es, $c_{a,b} = c^{(1)}_{a,b} + i c^{(2)}_{a,b}$ siendo $c^{(1)}_{a,b}, c^{(2)}_{a,b}$ variables normales estándar reales independientes.

las ondas aleatorias resultantes

$$T_n(x) = \sum_{a,b\in\mathbb{Z}:\ a^2+b^2=n} c_{a,b}e_{a,b}(x); \quad x \in \mathbb{T}_2,$$

se conocen como *ondas aleatorias aritméticas*. Si se quieren ondas reales se puede tomar parte la real de T_n o imponer que $c_{-a,-b} = \overline{c_{a,b}}$. En el caso de $\mathbb{S}^2$ los valores propios son de la forma $k = n(n+1)$ para $n \in \mathbb{N}$ y las bases de los subespacios propios están formadas por los llamados armónicos esféricos. Luego se procede de la misma manera. Se obtienen así los *armónicos esféricos aleatorios*.

Debido a la forma de los valores propios surgen sutilezas e intervienen propiedades aritméticas, ver [24] por ejemplo. En particular, las dimensiones N_n de los correspondientes subespacios propios fluctuan y como consecuencia no hay una única forma de interpretar el límite cuando el nivel de energía tiende a infinito.

Para las ondas aritméticas en el toro $\mathbb{T}_2$ se conocen los límites de la esperanza y la varianza de la longitud de las curvas de nivel cero [32], o del número de ceros comunes a dos copias independientes de ellas [17] cuando $N_n \to \infty$. Lo interesante es que surgen límites no universales, dependiendo de la sucesión $N_{n_j} \to \infty$ elegida se obtienen diferentes varianzas límites e incluso se obtienen distribuciones límites distintas[5], ver [17, 32] y las referencias allí presentes.

En el caso de los armónicos esféricos aleatorios en $\mathbb{S}^2$, a diferencia del anterior, en [33] han obtenido teoremas centrales del límite para la longitud de la curva de nivel cero.

Berry [13] conjeturó que cuando el valor propio k (equivalentemente n en los modelos anteriores) es grande, las funciones propias del Laplaciano se pueden modelar por una onda aleatoria, que llamó *plana*, que se puede describir en el caso de dimensión dos como un proceso Gaussiano b_k centrado con covarianza dada por

$$\mathbf{cov}\,(b_k(x), b_k(y)) = J_0(\|x-y\|),$$

siendo J_0 la función de Bessel del primer tipo y de orden 0. En el plano, expresando x en coordenadas polares r, θ se puede escribir

$$b_k(x) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} c_\ell J_{|\ell|}(kr)e^{i\ell\theta},$$

siendo J_ℓ la función de Bessel del primer tipo y de orden ℓ. En [37] se obtiene un Teorema Central del Límite para la longitud de la curva de nivel cero en el caso real y para el número de ceros en el caso complejo sobre regiones del plano cuando éstas crecen hasta cubrir todo el plano.

Las ondas aritméticas aleatorias y los armónicos esféricos aleatorios son coherentes con la conjetura de Berry pues sus covarianzas convergen a la planteada por él.

Aquí nos hemos centrado en el número de ceros (o en la longitud de la curva de nivel cero); pero es justo mencionar que hay una literatura enorme que trata sobre otros aspectos geométricos de los ceros de las ondas aleatorias. Por ejemplo, un aspecto importante es que los ceros de ondas (y polinomios) aleatorias como procesos puntuales son sorprendentemente regulares y sus puntos parecen estar sobre un reticulado, ver [12] donde se compara el conjunto de puntos críticos de

[5]Se habla de teoremas límites no centrales cuando la distribución límite no es normal.

una onda aleatoria plana con los puntos generados por un proceso de Poisson entre otros. Ver también [4] en el caso de polinomios. Por otro lado, se estudia el número de componentes conexas del conjunto de ceros, o el número de componentes conexas en que éste divide al dominio, etc, ver [25] y sus referencias por ejemplo.

4. Contando los ceros de una función

En esta última sección queremos echar un vistazo a la sala de máquinas. Es decir, ya no hablaremos sobre los resultados obtenidos acerca de los ceros de polinomios y ondas aleatorias sino que nos preocuparemos sobre cómo se obtienen tales resultados. Para mantenernos en un contexto simple nos restringimos al número de ceros de una función real de variable real. En [10] se encuentra la teoría general.

El punto de partida es la *fórmula de conteo* de Mark Kac que data de la década de 1940. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable y con derivada continua en todo punto. Para el *número de ceros* de f en el intervalo $[a, b]$ escribimos $N_f[a, b]$, esto es

$$N_f[a, b] = \#\{t \in [a, b] : f(t) = 0\}.$$

De manera rápida e informal la fórmula de Kac se puede escribir como:

$$N_f[a, b] = \int_a^b \delta_0(f(t))dt,$$

siendo δ_0 la *Delta de Dirac* en 0. La Delta de Dirac en 0 es una "función" que se anula en todos los puntos salvo en cero donde vale infinito de modo que

$$\int \delta_0(x)dt = 1.$$

Para formalizar esta idea hay que recurrir a una *aproximación a la unidad.* Esto es, a una sucesión de funciones $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no negativas, tales que $\int \psi_n = 1$ para todo n y $\int_{|t|>\varepsilon} \psi_n(t)dt \underset{n\to\infty}{\to} 0$ para todo $\varepsilon > 0$. Se puede probar que si g es continua se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \int \psi_n(t)g(t)dt = g(0).$$

Dado un conjunto A denotamos por $\mathbf{I}_A$ su función característica, esto es

$$\mathbf{I}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A; \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Entonces, eligiendo $\psi_\delta(x) = \frac{1}{2\delta}\mathbf{I}_{\{|x|<\delta\}}$, la fórmula de Kac resulta

$$N_f[a, b] = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{2\delta} \int_a^b |f'(t)|\mathbf{I}_{\{|f(t)|<\delta\}}dt.$$

En realidad hay que tener un poco de cuidado si f tiene puntos de tangencia a nivel cero o si toma este valor en los extremos del intervalo $[a, b]$. Afortunadamente, en nuestro contexto, después de aleatorizar podemos ignorar estos inconvenientes pues ocurren con probabilidad cero.

Es interesante remarcar que si bien aparece un límite en la fórmula, dicho límite se alcanza. Es decir, si η es suficientemente chico, entonces

$$N_f[a, b] = \frac{1}{2\eta} \int_a^b |f'(t)|\mathbf{I}_{\{|f(t)|<\eta\}}dt.$$

Pero η depende de f y si f es aleatoria, como en los casos que nos interesan, también lo es η.

Hay dos caminos complementarios para estudiar la distribución del número de ceros de f a partir de la fórmula de conteo de Kac.

4.1. La fórmula de Rice. El primero de los caminos consiste en tomar esperanza de ambos lados de la fórmula de Kac. Con ello se obtiene una fórmula integral para el número medio de ceros de f en el intervalo $[a,b]$. Sin preocuparnos de los tecnicismos el camino es

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(N_f[a,b]\right) &= \mathbb{E}\left[\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\delta}\int_a^b |f'(t)|\mathbf{I}_{\{|f(t)|<\delta\}}dt\right] \\ &= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\delta}\int_a^b \mathbb{E}\left[|f'(t)|\mathbf{I}_{\{|f(t)|<\delta\}}\right]dt \\ &= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\delta}\int_a^b\int_{-\delta}^{\delta} \mathbb{E}\left[|f'(t)| \mid f(t)=x\right]p_{f(t)}(x)dxdt \\ &= \int_a^b \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} \mathbb{E}\left[|f'(t)| \mid f(t)=x\right]p_{f(t)}(x)dxdt \\ &= \int_a^b \mathbb{E}\left[|f'(t)| \mid f(t)=0\right]p_{f(t)}(0)dt.\end{aligned}$$

Aquí, el primer factor en el integrando es la esperanza condicional de la variable aleatoria $|f'(t)|$ dado el evento $\{f(t)=0\}$. Lidiar con tal esperanza condicional es en general complicado. El caso gaussiano es el ideal pues la independencia es equivalente a la no correlación y gracias a eso se puede levantar la condición eligiendo $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que $f'(t)-\alpha f(t)$ sea independiente de $f(t)$. Luego, si $\mathbb{E}\left(f(t)\right)=0$ se tiene

$$\mathbb{E}\left[|f'(t)| \mid f(t)=0\right] = \mathbb{E}\left(|f'(t)-\alpha f(t)|\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_t;$$

siendo σ_t^2 la varianza de $f'(t)-\alpha f(t)$. El cálculo directo da $\alpha = \frac{\mathbf{cov}\left(f'(t),f(t)\right)}{\mathbf{var}\left(f(t)\right)}$.

Vale la pena mencionar que la fórmula de Rice permite estudiar una cantidad global, que depende de todo el intervalo, como el número de ceros por medio de cantidades locales dependientes de un único valor de t.

De forma similar es posible hallar expresiones para los momentos de cualquier orden. En efecto, sean $k\in\mathbb{N}$ y $N^{[k]} = N\cdot(N-1)\cdots(N-k+1)$, entonces

$$\mathbb{E}\,N_f^{[k]}[a,b] = \int_{[a,b]^k}\mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{k}|f'(t_j)| \mid f(t_1)=\cdots=f(t_k)=0\right] \cdot p_{f(t_1),\cdots,f(t_k)}(0,\cdots,0)dt_1\cdots t_k.$$

En general, conocer todos los momentos de una variable aleatoria es equivalente a conocer su distribución (ver el problema de los momentos). Esa es la idea detrás del método de los momentos para hallar estimadores o del método homónimo para probar la convergencia en distribución. Sin embargo, en la práctica puede ser muy difícil resolver la fórmula de inversión y pasar de los momentos a la distribución.

4.2. Caos de Wiener. El segundo camino que abre la fórmula de conteo de Kac consiste en hacer un desarrollo en serie dentro de la integral en la fórmula de Kac. De nuevo el caso gaussiano es el ideal.

Supongamos entonces que el proceso f es gaussiano, esto es, que los vectores aleatorios $(f(t_1), \cdots, f(t_k))$ tienen distribución normal para cualquier k y para cualesquiera $(t_1, \ldots, t_k)$. Sea φ la densidad normal estándar

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Los polinomios de Hermite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definidos por

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dt^n} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

o alternativamente por

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = x \text{ y } H_n(x) = xH_{n-1}(x) + (n-1)H_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

forman un sistema ortogonal completo en el espacio de las funciones de cuadrado integrable con producto interno $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\varphi(x)dx$. Además $\|H_n\|_2^2 = n!$. Esto implica que las funciones $x \mapsto \psi_n(x)$ e $y \mapsto |y|$ se pueden escribir como

$$\psi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} H_{2n}(x); \qquad |y| = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} H_{2n}(x).$$

Los coeficientes a_{2n}, b_{2n} son explícitos. La razón por la cual aparecen sólo los términos pares es la paridad de las funciones ψ_n y valor absoluto.

Reemplazando cada factor del integrando de la fórmula de Kac por su desarrollo de Hermite y tomando límite en n se obtiene la llamada expansión en el *Caos de Wiener* del número de ceros de f

$$N_f[a,b] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2k} b_{2n-2k} \int_a^b H_{2k}(f(t)) H_{2n-2k}(f'(t)) dt =: \sum_{n=0}^{\infty} I_n.$$

Estas igualdades son en el sentido de L^2. Las variables I_n, llamadas componentes caóticas de $N_f[a,b]$, son no correlacionadas.

La utilidad de este tipo de desarrollos radica en que, para cada n, las variables I_n tienen una estructura muy particular. En realidad, I_n puede escribirse como una integral estocástica múltiple de orden n respecto a un movimiento Browniano estándar, ver [38].

El Teorema del Cuarto Momento de Peccati, Taqqu y Tudor [38], da condiciones para probar la convergencia en distribución a una normal de una sucesión de variables de la forma I_n para un n fijo (o de una suma sobre un número finito de valores de n) a partir de la convergencia del cuarto momento al de la normal. Esto es una gran simplificación respecto al tradicional método de los momentos[6] que dice que dada una sucesión de variables aleatorias X_n, la convergencia de todos los momentos $\mathbb{E}(X_n^k)$ a los respectivos momentos de una variable normal implica que X_n converge en distribución a una normal. El Teorema del Cuarto Momento dice que en el caso en que las variables X_n están dentro de un mismo caos, basta probar la convergencia del cuarto momento ($\mathbb{E}(X_n^4)$) al cuarto momento de una variable normal. Entonces, en lugar de probar una infinitud de convergencias basta probar una sola.

[6]hay una formulación equivalente en términos de los llamados cumulantes.

Otro punto fuerte de este desarrollo se pone de manifiesto al probar la no anulación de la varianza pues en general se puede probar a mano la positividad de la varianza de la primer componente.

Para finalizar, en general en los teoremas límites no centrales para los ceros de ondas aleatorias hay una componente que domina sobre todas las demás y se puede estudiar directamente su límite.

Referencias

[1] J. Angst, G. Poly. Universality of the mean number of real zeros of random trigonometric polynomials under a weak Cramer condition. arXiv:1511.08750

[2] J. Angst, F. Dalmao, G. Poly. On the real zeros of random trigonometric polynomials with dependent coefficients. arXiv:1706.01654

[3] D. Armentano. A review of some recent results on random polynomials over $\mathbb{R}$ and over $\mathbb{C}$. Publicaciones Matemáticas del Uruguay, Proceedings of the IFUM Colloquium, Vol. 12, 1-14, 2011

[4] D. Armentano, C. Beltrán, M. Shub. Minimizing the discrete logarithmic energy on the sphere: the role of random polynomials. Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), no. 6, 2955-2965.

[5] J-M. Azaïs, D. Armentano, F. Dalmao, J. León. On the asymptotic variance of the number of real roots of random polynomial systems. arXiv:1703.08163

[6] J-M. Azaïs, F. Dalmao, J. León, CLT for the zeros of classical random trigonometric polynomials. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. 52 (2016), no. 2, 804-820.

[7] J-M. Azaïs, F. Dalmao, J.R. León, I. Nourdin, G. Poly. Local universality of the number of zeros of random trigonometric polynomials with continuous coefficients. arXiv:1512.05583

[8] J-M Azaïs, J. R. León. Clt for crossings of random trigonometric polynomials. Electron. J. Probab. 18, no. 68 (2013), 1-17.

[9] J-M Azaïs, M. Wschebor. On the roots of a random system of equations. The theorem on Shub and Smale and some extensions. Found. Comput. Math. 5 (2005), no. 2, 125-144.

[10] J-M Azaïs, M. Wschebor. Level sets and extrema of random processes and fields. John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ, (2009).

[11] V. Bally, L. Caramellino, G. Poly. Non universality for the variance of the number of real roots of random trigonometric polynomials. arXiv:1711.03316

[12] D. Beliaev, V. Cammarota, I. Wigman Two point function for critical points of a random plane wave. arXiv:1704.04943

[13] M.V. Berry. Regular and irregular semiclassical wave functions. J. Phys. A: Math. Gen. 10 2083-91

[14] A.T. Bharucha-Reid, M. Sambandham. Random polynomials. Probability and Mathematical Statistics. Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1986. xvi+206 pp. ISBN: 0-12-095710-8.

[15] E. Bogomolny, O. Bohigas, P. Lebœuf. Quantum chaotic dynamics and random polynomials. J. Statist. Phys. 85 (1996), no. 5-6, 639-679.

[16] F. Dalmao. Asymptotic variance and CLT for the number of zeros of Kostlan Shub Smale random Polynomials. C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I 353 (2015), 1141-1145.

[17] F. Dalmao, I. Nourdin, G. Peccati, M. Rossi. Phase Singularities in Complex Arithmetic Random Waves. arXiv:1608.05631

[18] Y. Do, V. Vu. Central limit theorems for the real zeros of Weyl polynomials. arXiv:1707.09276

[19] A. Edelman, E. Kostlan. How many zeros of a random polynomial are real? Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 32 (1995), no. 1, 1-37.

[20] H. Flasche. Expected number of real roots of random trigonometric polynomials. Stochastic Process. Appl. 127 (2017), no. 12, 3928-3942.

[21] A. Granville, I. Wigman. The distribution of the zeros of random trigonometric polynomials. Amer. J. Math., 133(2), (2011), 295-357.

[22] A. Iksanov, Z. Kabluchko, A. Marynych. Local universality for real roots of random trigonometric polynomials. Electron. J. Probab. 21 (2016), Paper No. 63, 19 pp.

[23] M. Kac. On the average number of real roots of a random algebraic equation. Bull. Amer. Math. Soc., 49, (1943), 314-320.

[24] P. Kurlberg, I: Wigman. On probability measures arising from lattice points on circles. Math. Ann. 367 (2017), no. 3-4, 1057-1098.

[25] P. Kurlberg, I: Wigman. Variation of the Nazarov-Sodin constant for random plane waves and arithmetic random waves. arXiv:1707.00766

[26] T. Letendre. Expected volume and Euler characteristic of random submanifolds. J. Funct. Anal. 270 (2016), no. 8, 3047-3110.

[27] T. Letendre, M. Puchol. Variance of the volume of random real algebraic submanifolds II. arXiv:1707.09771

[28] J. E. Littlewood, A. C. Offord. On the distribution of the zeros and a-values of a random integral function. I. J. London Math. Soc., 20, 1945, 130-136.

[29] J. E. Littlewood, A. C. Offord. On the distribution of zeros and a- values of a random integral function. II. Ann. of Math. (2), 49:885 - 952; errata 50, (1949), 990-991.

[30] J. E. Littlewood, A. C. Offord. On the number of real roots of a random algebraic equation. III. Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S., 12(54), (1943), 277-286.

[31] M. S. Longuet-Higgins. The statistical analysis of a random, moving surface. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A. 249 (1957), 321-387.

[32] D. Marinucci, G. Peccati, M. Rossi, I. Wigman. Non-Universality of Nodal Length Distribution for Arithmetic Random Waves Geom. Funct. Anal. 26 (2016), no. 3, 926–960.

[33] D. Marinucci, M. Rossi, I. Wigman. The Asymptotic Equivalence of the Sample Trispectrum and the Nodal Length for Random Spherical Harmonics. arXiv:1705.05747

[34] N. B. Maslova. The distribution of the number of real roots of random polynomials. Teor. Verojatnost. i Primenen., 19, (1974), 488-500.

[35] N. B. Maslova. The variance of the number of real roots of random polynomials. Teor. Verojatnost. i Primenen., 19, (1974), 36-51.

[36] H. Nguyen, O. Nguyen, V. Vu. On the number of real roots of random polynomials. Commun. Contemp. Math. 18 (2016), no. 4, 1550052, 17 pp.

[37] I. Nourdin, G. Peccati, M. Rossi. Nodal Statistics of Planar Random Waves. arXiv:1708.02281

[38] G. Peccati, M. S. Taqqu. Wiener chaos: moments, cumulants and diagrams, volume 1 of Bocconi & Springer Series. Springer, Milan, 2011. A survey with computer implementation, Supplementary material available online.

[39] N. Renganathan, M. Sambandham. On the average number of real zeros of a random trigonometric polynomial with dependent coefficients. II. Indian J. Pure Appl. Math. 15 (1984), no. 9, 951-956.

[40] M. Sambandham. On the number of real zeros of a random trigonometric polynomial. Trans. Amer. Math. Soc. 238 (1978), 57-70.

[41] M. Shub, S. Smale. Complexity of Bézout's theorem. II. Volumes and probabilities. Computational Algebraic Geometry (Nice, 1992), Progress in Mathematics, vol. 109, Birkhäuser, Boston, MA, 1993, pp. 267-285.

[42] Z. Su, Q. Shao. Asymptotics of the variance of the number of real roots of random trigonometric polynomials. Science China Mathematics. 55(11), (2012), 2347-2366.

[43] M. Wschebor. On the Kostlan-Shub-Smale model for random polynomial systems. Variance of the number of roots. J. Complexity 21 (2005), no. 6, 773-789.

[44] J.E. Wilkins, Jr. Mean number of real zeros of a random trigonometric polynomial. Proc. Amer. Math. Soc., 111(3), (1991), 851-863.

Departamento de Matemática y Estadística del Litoral.
Universidad de la República. Salto, Uruguay.
E-mail: **fdalmao@unorte.edu.uy**
URL: http://dmel.interior.edu.uy/federico-dalmao/