

## INTRODUCCIÓN A LAS ÁLGEBRAS DE LIE

ANA GONZÁLEZ.

Estas notas fueron elaboradas para el curso Introducción a las álgebras de Lie a dictarse en el 6to Coloquio Uruguayo de Matemática del 20 al 22 de diciembre de 2017. El material que aquí se presenta está basado en el siguiente material bibliográfico: Introduction to Lie algebras de Erdmann y Wildon; Lie-algebraic approach for pricing moving barrier options with time-dependent parameters de Lo y Hui y la monografía de grado Introducción a las álgebras de Lie.

### 1. CONCEPTOS BÁSICOS

En esta sección desarrollaremos los conceptos básicos de la teoría de álgebras de Lie. Estas notas sólo pretenden introducir conceptos y resultados necesarios para comprender la clasificación que se realiza en la sección 2 y el ejemplo desarrollado en la sección 3.

**Definition 1.** Sea  $\mathbb{k}$  un cuerpo. Decimos que  $L$  es un álgebra de Lie sobre  $\mathbb{k}$  si es un  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial y admite un producto (bilineal), llamado corchete de Lie

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : L \times L &\rightarrow L \\ (x, y) &\mapsto [x, y] \end{aligned}$$

Que satisface las siguientes propiedades

- (1)  $[x, x] = 0, \forall x \in L$ .
- (2)  $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \forall x, y, z \in L$ . Esta propiedad se conoce como condición de Jacobi.

Un álgebra de Lie se dice abeliana si  $\forall x, y \in L$  se tiene que el corchete de Lie

$$[x, y] = 0.$$

*Remark 2.*

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x] \Rightarrow [x, y] = -[y, x].$$

Entonces, la propiedad (1) puede sustituirse por la siguiente propiedad:

$$(1') [x, y] = -[y, x], \forall x, y \in L.$$

*Remark 3.* Supongamos que el álgebra es de dimensión finita y consideremos  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  una base de la misma (como espacio vectorial sobre  $\mathbb{k}$ ), por lo cual todo elemento  $x \in L$  puede escribirse como

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i, \quad \xi_i \in \mathbb{k}.$$

Para probar que un espacio vectorial es un álgebra de Lie basta verificar que los elementos de la base satisfacen las condiciones de Lie.

---

Received by the editors December 15, 2017.

Veamos sólo la condición (1). La condición (2) se prueba de forma similar pero los cálculos son más extensos.

$$\begin{aligned} [x, x] &= \left[ \sum_{i=1}^n \xi_i e_i, \sum_{j=1}^n \xi_j e_j \right] = \sum_{i,j=1}^n \xi_i \xi_j [e_i, e_j] = 0 \\ &\Rightarrow [x, x] = 0, \quad \forall x \in L. \end{aligned}$$

**Definition 4 (Estructura constante).** Si  $L$  es un álgebra de Lie sobre  $\mathbb{k}$  con base  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  entonces  $[\cdot, \cdot]$  queda completamente determinado si conocemos los productos  $[e_i, e_j]$ . Definamos escalares  $a_{ij}^k \in \mathbb{k}$  tales que

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n a_{ij}^k e_k.$$

Los escalares  $a_{ij}^k$  se llaman estructura constante de  $L$  con respecto a la base  $\mathcal{B}$ . Diferentes bases pueden dar, en general, diferentes estructuras constantes.

Por las propiedades (1) y (1') es suficiente conocer la estructura constante  $a_{ij}^k$ ,  $1 \leq i < j \leq n$  para tener determinada la estructura de Lie sobre  $L$ .

**Example 1.1.** Consideremos el cuerpo de los reales  $\mathbb{R}$  y el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$  sobre  $\mathbb{R}$ . Observemos que el producto vectorial

$$\begin{aligned} \wedge : \quad \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto x \wedge y \end{aligned}$$

define una estructura de Lie sobre  $\mathbb{R}^3$ .

Recordemos que  $(x_1, x_2, x_3) \wedge (y_1, y_2, y_3) = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$ . Sabemos que  $\wedge$  es una función bilineal. Veamos que verifica las condiciones de Lie.

- (a)  $x \wedge x = (x_2 x_3 - x_3 x_2, x_3 x_1 - x_1 x_3, x_1 x_2 - x_2 x_1) = (0, 0, 0)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^3$ .
- (b) Condición de Jacobi:

$$[x, [y, z]] = x \wedge (y \wedge z) = (x_2 y_1 z_2 - x_2 y_2 z_1 - x_3 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_3, x_3 y_2 z_3 - x_3 y_3 z_2 - x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1, x_1 y_3 z_1 - x_1 y_1 z_3 - x_2 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_2)$$

$$[y, [z, x]] = y \wedge (z \wedge x) = (y_2 z_1 x_2 - y_2 z_2 x_1 - y_3 z_3 x_1 + y_3 z_1 x_3, y_3 z_2 x_3 - y_3 z_3 x_2 - y_1 z_1 x_2 + y_1 z_2 x_1, y_1 z_3 x_1 - y_1 z_1 x_3 - y_2 z_2 x_3 + y_2 z_3 x_2)$$

$$[z, [x, y]] = z \wedge (x \wedge y) = (z_2 x_1 y_2 - z_2 x_2 y_1 - z_3 x_3 y_1 + z_3 x_1 y_3, z_3 x_2 y_3 - z_3 x_3 y_2 - z_1 x_1 y_2 + z_1 x_2 y_1, z_1 x_3 y_1 - z_1 x_1 y_3 - z_2 x_2 y_3 + z_2 x_3 y_2)$$

Sumando obtenemos que

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

**Example 1.2.** Cualquier espacio de vectores  $V$  tiene un corchete de Lie dado por

$$[x, y] = 0, \quad \forall x, y \in V.$$

Esta es una estructura de Lie abeliana sobre  $V$ .

En particular el cuerpo puede considerarse como un álgebra de Lie de dimensión 1 con este corchete.

**Example 1.3.** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre  $\mathbb{k}$ . Denotamos por  $\mathfrak{gl}(V)$  el conjunto de todas las transformaciones lineales de  $V$  en  $V$ . Este es de nuevo un espacio vectorial sobre  $\mathbb{k}$ , y podemos definir un corchete que le de estructura de álgebra de Lie.

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathfrak{gl}(V) \times \mathfrak{gl}(V) &\rightarrow \mathfrak{gl}(V) \\ (T, S) &\mapsto T \circ S - S \circ T \end{aligned}$$

Es claro que la composición de transformaciones lineales es una operación bilineal. Veamos las condiciones de Lie.

$$\begin{aligned} [T, T] &= TT - TT = 0, \\ [T, [S, U]] + [S, [U, T]] + [U, [T, S]] &= \\ &= T(SU - US) - (SU - US)T + S(UT - TU) - (UT - TU)S + U(TS - ST) - (TS - ST)U \\ &= \\ &= TSU - TUS - SUT + UST + SUT - STU - UTS + TUS + UTS - UST - TSU + STU \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Example 1.4.** Consideremos el espacio vectorial de las matrices cuadradas sobre  $\mathbb{k}$ ,  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ . En este espacio vectorial también podemos definir un corchete de Lie

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k}) \times \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k}) &\rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k}) \\ (M, N) &\mapsto MN - NM \end{aligned}$$

una forma de probar que es un álgebra de Lie es considerar la base canónica de las matrices  $\{E_{ij}, 1 \leq i, j \leq n\}$  y verificar (1) y (2) sobre estas matrices. Para ello basta observar que

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{kj}.$$

**Example 1.5.** Sea  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})$  el subespacio de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$  de todas las matrices de traza cero. Para matrices cuadradas arbitrarias  $M, N$ , la matriz  $MN - NM$  tiene traza 0, así  $[M, N] = MN - NM$ , define una estructura de Lie sobre  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})$ . Esta álgebra de Lie es conocida como álgebra lineal especial.

Como espacio vectorial  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})$  tiene una base que consiste en las matrices  $E_{ij}$ ,  $i \neq j$  junto con  $E_{ii} - E_{i+1, i+1}$ ,  $1 \leq i < n$ .

**Example 1.6.** Sea  $\mathfrak{b}(n, \mathbb{k})$  el conjunto de matrices triangulares superiores en  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ . Esta es un álgebra de Lie con el mismo corchete de Lie de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ .

Similarmente,  $\mathfrak{n}(n, \mathbb{k})$  el conjunto de matrices estrictamente triangulares superiores en  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$  es un álgebra de Lie con el mismo corchete que  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ .

### 1.1. Elementos de la teoría de álgebras de Lie.

Los dos últimos ejemplos presentados sugieren que existe la noción de subálgebra de Lie.

**Definition 5.** Sea  $L$  un álgebra de Lie, decimos que  $S$  es una subálgebra de Lie de  $L$  si es un subespacio vectorial  $S \subset L$  tal que

$$[x, y] \in S, \quad \forall x, y \in S.$$

**Definition 6.** Un ideal  $I$  de un álgebra de Lie  $L$  es un subespacio de  $L$  tal que:

$$[x, y] \in I, \quad \forall x \in L, y \in I.$$

*Remark 7.* Por la condición (1'),  $[x, y] = -[y, x]$ , así que no necesitamos distinguir entre ideales a izquierda o a derecha. Por ejemplo  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})$  es un ideal de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$  y  $\mathfrak{n}(n, \mathbb{k})$  es un ideal de  $\mathfrak{b}(n, \mathbb{k})$ .

Un ideal siempre es una subálgebra. Pero, por otro lado, una subálgebra no necesariamente es un ideal. Por ejemplo  $\mathfrak{b}(n, \mathbb{k})$  es una subálgebra de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ , pero si  $n > 2$ , no es un ideal. Para ver esto notar que  $E_{11} \in \mathfrak{b}(n, \mathbb{k})$  y  $E_{21} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$  y

$$[E_{21}, E_{11}] = E_{21} \notin \mathfrak{b}(n, \mathbb{k}).$$

Un álgebra de Lie es por sí misma un ideal de  $L$ , porque  $\forall x, y \in L$  se tiene que  $[x, y] \in L$ . Así como también  $\{0\}$  es un ideal de  $L$ , a estos ideales se los llama *ideales triviales* de  $L$ .

Un ejemplo importante de un ideal que es no-trivial es el centro de  $L$ , el cual definimos como sigue:

**Definition 8.** Se define el centro de un álgebra de Lie como:

$$Z(L) = \{x \in L : [x, y] = 0 \forall y \in L\}.$$

**Theorem 9.** Sea  $L$  un álgebra de Lie y  $Z(L)$  su centro. Entonces

$$L = Z(L) \Leftrightarrow L \text{ es abeliana.}$$

*Proof.* Si  $L = Z(L) \Rightarrow [x, y] = 0, \forall x, y \in L$  lo cual prueba que  $L$  es abeliana.

Recíprocamente, si  $L$  es abeliana entonces  $[x, y] = 0$  para todo  $x, y \in L$ , por lo tanto  $x \in Z(L)$  para todo  $x \in L$ . Es decir,  $L = Z(L)$ .  $\square$

**Definition 10 (Homomorfismos entre álgebras de Lie).** Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos álgebras de Lie sobre el mismo cuerpo  $\mathbb{k}$ , se dice que una función  $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$  es un homomorfismo de Lie si  $\varphi$  es una transformación lineal tal que

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)], \quad \forall x, y \in L_1.$$

Decimos que  $\varphi$  es un isomorfismo si  $\varphi$  es además biyectiva.

**Definition 11 (Homomorfismo adjunto).** Si  $L$  es un álgebra de Lie el homomorfismo adjunto se define como:

$$\begin{aligned} \text{ad} : L &\rightarrow \mathfrak{gl}(L) \\ x &\mapsto \text{ad}(x) : L \rightarrow L \\ & \quad y \mapsto [x, y] \end{aligned}$$

Observar que  $\text{ad}$  es una transformación lineal. Veamos que es un homomorfismo de Lie, es decir que se verifica que:

$$\begin{aligned} \text{ad}([x, y]) &= [\text{ad}(x), \text{ad}(y)] = \text{ad}(x) \circ \text{ad}(y) - \text{ad}(y) \circ \text{ad}(x). \\ (\text{ad}([x, y]))(z) &= [[x, y], z] = -[z, [x, y]] \\ &= [x, [y, z]] + [y, [z, x]] \\ &= \text{ad}(x)([y, z]) + \text{ad}(y)([z, x]) \\ &= \text{ad}(x)(\text{ad}(y)(z)) + \text{ad}(y)(-\text{ad}(x)(z)) \\ &= [\text{ad}(x), \text{ad}(y)](z). \end{aligned}$$

**Theorem 12.** Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos álgebras de Lie abelianas.  $L_1$  y  $L_2$  son isomorfas si y sólo si tienen la misma dimensión.

*Proof.* Si son isomorfas, en particular son isomorfas como espacios vectoriales, entonces tienen la misma dimensión.

Recíprocamente, si tienen la misma dimensión son isomorfas como espacios vectoriales. Además, como son abelianas  $[x, y] = 0, \forall x, y \in L_1$  y  $[x', y'] = 0, \forall x', y' \in L_2$ , entonces el isomorfismo preserva las estructuras de Lie. Es decir, es un isomorfismo de álgebras de Lie.  $\square$

**Definition 13 (Álgebra derivada).** Sea  $L$  un álgebra de Lie, definimos el álgebra derivada de  $L$ , como la subálgebra  $L' = [L, L]$ . Es decir:

$$L' = \text{span}\{[x, y] : x, y \in L\} = \left\{ t = \sum c_i [x_i, y_i] : x_i, y_i \in L, c_i \in \mathbb{k} \right\}.$$

**Example 1.7.** Sea  $L$  el álgebra de matrices de la forma

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C} \right\}$$

Si  $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  y  $N = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  entonces  $[M, N] = MN - NM = 0$ . Por lo tanto  $L' = \{0\}$ .

**Definition 14 (Álgebra de Lie cociente).** Si  $I$  es un ideal de un álgebra de Lie  $L$ , entonces es en particular un subespacio de  $L$ , así el espacio cociente  $L/I$  se puede dotar de una estructura de álgebra de Lie de manera natural definiendo

$$[w + I, z + I] = [w, z] + I, \quad \forall w, z \in L.$$

**Theorem 15 (Teoremas de isomorfismo).** (a) Sea  $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$  un homomorfismo de álgebras de Lie. Entonces,  $N(\varphi)$  es un ideal de  $L_1$ ,  $\text{Im}(\varphi)$  es una subálgebra de  $L_2$  y

$$L_1/N(\varphi) \cong \text{Im}(\varphi).$$

(b) Si  $I$  y  $J$  son ideales de un álgebra de Lie  $L$  tales que  $I \subset J$ . Entonces  $J/I$  es un ideal de  $L/I$  y

$$(L/I)/(J/I) \cong L/J.$$

## 1.2. Álgebras de Lie resolubles.

**Definition 16 (Serie de derivadas).** Se define la serie de derivadas de  $L$  por la serie con los términos

$$L^{(1)} = L' \text{ y } L^{(k)} = [L^{(k-1)}, L^{(k-1)}] \text{ } k \geq 2,$$

donde tenemos que  $L \supseteq L^{(1)} \supseteq L^{(2)} \supseteq \dots$ .

**Example 1.8 (Álgebra de Heisenberg).** El álgebra de Heisenberg  $\mathcal{H}_n$ , es el álgebra de Lie real de dimensión  $2n + 1$  que tiene por base los elementos:

$$\{P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n, C\}$$

y el corchete de Lie definido por

$$[P_i, P_j] = [Q_i, Q_j] = [P_i, C] = [Q_i, C] = [C, C] = 0, \quad [P_i, Q_j] = C.$$

Estudiemos el caso particular de  $n = 1$ , la base es  $\{P, Q, C\}$  tal que:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces una forma de definir la forma matricial de los elementos del álgebra es:

$$pP + qQ + cC = \begin{pmatrix} 0 & p & c \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tomando el corchete de Lie  $[P, Q] = PQ - QP$ , resulta evidente que  $[P, Q] = C$ ,  $[P, C] = [Q, C] = 0$ . Observar que

$$\left[ \begin{pmatrix} 0 & p & c \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p' & c' \\ 0 & 0 & q' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & pq' - qp' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces  $\mathcal{H}'_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{C} \right\}$ .

Ahora  $\left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Entonces  $\mathcal{H}_1^{(2)} = 0$ . Por lo cual el álgebra de Heisenberg es resoluble.

Por otro lado, si  $L = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , tenemos que  $L = L'$  y por lo tanto  $L^{(n)} = L$  para todo  $n \geq 1$ , por lo cual  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  no es resoluble.

**Theorem 17.** Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos álgebras de Lie y  $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$  isomorfismo entre ellas. Entonces

- (1)  $\varphi(L'_1) = L'_2$ .
- (2)  $\varphi(Z(L_1)) = Z(L_2)$ .

La demostración de este resultado queda como ejercicio para el lector.

**Ejercicio 1:** Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos álgebras de Lie. Consideremos  $L = \{(x_1, x_2) : x_i \in L_i\}$  la suma directa de los espacios vectoriales subyacentes. Si definimos  $[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_2])$ , probar que  $L$  es un álgebra de Lie. La misma también se llama *suma directa* de  $L_1$  y  $L_2$ . Probar que si  $L = L_1 \oplus L_2$  entonces  $Z(L) = Z(L_1) \oplus Z(L_2)$  y  $L' = L'_1 \oplus L'_2$ .

## 2. ÁLGEBRAS DE LIE DE DIMENSIÓN BAJA

En esta sección estudiaremos las álgebras de Lie de dimensiones 1, 2 y 3.

### 2.1. Álgebras de Lie abelianas.

Las álgebras de Lie abelianas son fáciles de comprender. Para todo número natural  $n$  hay un álgebra de Lie abeliana de dimensión  $n$ , donde para cualquier par de elementos el corchete de Lie es cero.

Aplicando el Teorema 12 sabemos que esta es única a menos de isomorfismos.

Para entender entonces cuantas álgebras de Lie, esencialmente diferentes (no isomorfas) hay nos concentraremos en las no abelianas.

Sabemos que álgebras de Lie de diferentes dimensiones no pueden ser isomorfas, ya que si lo fueran en particular serían isomorfas como espacios vectoriales, lo que implica que deben tener la misma dimensión. Más aun, si  $L$  es no abeliana, entonces su álgebra derivada  $L'$  es no nula y su centro  $Z(L)$  es un ideal propio. Además, por el Teorema 17, álgebras derivadas y centros se preservan por isomorfismos, así que es razonable usar la dimensión de  $L$  y las propiedades de  $L'$  y  $Z(L)$  para poder clasificar las álgebras de Lie.

A continuación estudiaremos las álgebras de Lie de dimensión 1, 2 y 3.

## 2.2. Álgebras de Lie de dimensión 1 y 2.

Toda álgebra de Lie de dimensión 1 es abeliana.

Supongamos que  $L$  es un álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2 sobre  $\mathbb{k}$ . El álgebra derivada,  $L'$ , debe tener como mucho dimensión 1, porque si  $\{x, y\}$  es una base de  $L$  entonces  $L'$  está generado por  $[x, y]$ . Por otro lado, el álgebra derivada no puede ser cero porque  $L$  no es abeliana. Entonces  $L'$  tiene exactamente dimensión 1. Consideremos un elemento no nulo  $x \in L'$  y completemos a una base  $\{x, z\}$  de  $L$ , entonces  $[x, z] \in L'$ , este elemento es no nulo (porque  $L$  es no abeliana)  $\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{k}: [x, z] = \alpha x$ . Podemos cambiar  $z$  por  $y = \alpha^{-1}z$ :  $[x, y] = x$ . Acabamos de probar que, si un álgebra de Lie de dimensión 2 no abeliana existe, esta admite una base de la forma  $\{x, y\}$  tal que  $[x, y] = x$ .

**Ejercicio 2:** Sea  $L$  un espacio vectorial de dimensión 2 con base  $\{x, y\}$ . Definimos una función bilineal  $[\cdot, \cdot]$  en  $L$  tal que  $[u, u] = 0$ , para todo  $u \in L$ . Probar que la identidad de Jacobi se verifica y por lo tanto  $L$  es un álgebra de Lie.

**Theorem 18.** *Para un cuerpo cualquiera  $\mathbb{k}$ , a menos de isomorfismo existe una única álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2. Esta álgebra admite una base  $\{x, y\}$ :  $[x, y] = x$ . El centro de esta álgebra es 0.*

## 2.3. Álgebras de Lie de dimensión 3.

Sea  $L$  álgebra de Lie de dimensión 3 sobre  $\mathbb{k}$ , no abeliana. Sabemos que el álgebra derivada  $L'$  es no nula. Esta puede tener dimensión 1, 2 o 3. También sabemos que el centro  $Z(L)$  es un ideal propio de  $L$ .

- $\dim L' = 1$  y  $L' \subset Z(L)$ .

En el Ejemplo 1.8 se presentó el álgebra de Heisenberg de dimensión 3,  $\mathcal{H}_1$ , con base  $\{P, Q, C\}$  tal que  $[P, Q] = C$  y  $[C, P] = [C, Q] = 0$ , es decir  $C \in Z(\mathcal{H}_1)$ .

Veamos que, a menos de isomorfismo, esta es la única álgebra de Lie de dimensión 3 tal que  $L' \subset Z(L)$  y  $\dim L' = 1$ .

Consideremos un álgebra de Lie  $L$  con estas condiciones y tomemos  $f, g \in L$  tales que  $[f, g] \neq 0$ . Como estamos asumiendo que  $\dim L' = 1$  el corchete  $[f, g]$  genera a  $L'$ . Además, como  $L' \subset Z(L)$  tenemos que  $[f, g]$  conmuta con todo elemento de  $L$ .

Definimos  $z = [f, g]$ , entonces  $\{f, g, z\}$  es un conjunto LI y por lo tanto una base de  $L$ .

- $\dim L' = 1$  y  $L' \not\subset Z(L)$ .

Tomemos  $L = L_1 \oplus L_2$ , donde  $L_1$  tiene dimensión 2 y es no abeliana y  $L_2$  tiene dimensión 1.

Aplicando el Ejercicio 1 tenemos que  $L' = L'_1 \oplus L'_2 = L'_1$ , entonces  $L'$  tiene dimensión 1. Además,  $Z(L) = Z(L_1) \oplus Z(L_2) = L_2$ , entonces  $L'$  no está contenido en  $L_2$ .

No hay otras álgebras de Lie con esta propiedad.

**Theorem 19.** *Sea  $\mathbb{k}$  un cuerpo cualquiera. Existe una única álgebra de Lie sobre  $\mathbb{k}$  de dimensión 3 tal que  $\dim L' = 1$  y  $L' \not\subset Z(L)$ . Esta álgebra de Lie es suma directa del álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2 con el álgebra de Lie de dimensión 1.*

*Proof.* Tomemos un elemento no nulo  $x \in L'$ , como  $x$  no es central existe  $y \in L$  tal que  $[x, y] \neq 0$ .

**Afirmación 1:** Si  $x, y \in L$ :  $[x, y] \neq 0$  entonces  $\{x, y\}$  es LI sobre  $\mathbb{k}$ . La prueba de esta afirmación queda como ejercicio para el lector.

Como  $x$  es un generador de  $L'$  tenemos que  $[x, y]$  es múltiplo de  $x$ . Como antes, podemos asumir que  $[x, y] = x$ . Extendemos  $\{x, y\}$  a  $\{x, y, w\}$  una base de  $L$ . Nuevamente, como  $x$  genera a  $L'$  existen escalares  $a, b \in \mathbb{k}$  tales que

$$[x, w] = ax, \quad [y, w] = bx.$$

**Afirmación 2:**  $L$  contiene un elemento central no nulo  $z$  que no está en el subespacio generado por  $x$  e  $y$ : sea  $z = \lambda x + \mu y + \nu w \in L$  entonces

$$[x, z] = [x, \lambda x + \mu y + \nu w] = \mu[x, y] + \nu[x, w] = \mu x + \nu ax,$$

$$[y, z] = [y, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[y, x] + \nu[y, w] = -\lambda x + \nu bx,$$

$$[w, z] = [w, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[w, x] + \mu[w, y] = -\lambda ax - \mu bx.$$

Si tomamos  $\lambda = b$ ,  $\mu = -a$  y  $\nu = 1$  entonces  $[x, z] = [y, z] = [w, z] = 0$  y  $z \notin \text{span}\{x, y\}$ .

Por lo cual  $L = \text{span}\{x, y\} \oplus \text{span}\{z\}$  suma directa de álgebras de Lie de la forma requerida.  $\square$

- $\dim L' = 2$ .

Estudiemos ahora el caso  $\dim L = 3$  y  $\dim L' = 2$ . Veamos que sobre  $\mathbb{C}$  hay infinitas de estas álgebras de Lie no isomorfas.

Tomemos una base de  $L'$ ,  $\{y, z\}$  y extendamos a una base de  $L$ ,  $\{x, y, z\}$ .

**Lemma 20.** (a)  $L'$  es abeliana.

(b) El mapa  $\text{ad } x : L' \rightarrow L'$  es un isomorfismo.

*Proof.* (a) Basta probar que  $[y, z] = 0$ : sabemos que  $[y, z] \in L'$  entonces existen  $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ :  $[y, z] = \alpha y + \beta z$ .

Si escribimos la matriz de  $\text{ad } y$  con respecto a la base  $\{x, y, z\}$  tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & \alpha \\ * & 0 & \beta \end{pmatrix} : * \in \mathbb{k}$$

Como  $y \in L'$  tenemos que  $\text{tr}(\text{ad } y) = 0$ :  $\text{ad} : L \rightarrow \text{gl}(L)$  es un homomorfismo de álgebras de Lie, es decir

$$\text{ad}[v, w] = \text{ad } v \circ \text{ad } w - \text{ad } w \circ \text{ad } v, \quad \forall v, w \in L.$$

Entonces  $\text{tr}(\text{ad}[v, w]) = \text{tr}(\text{ad } v \circ \text{ad } w - \text{ad } w \circ \text{ad } v) = 0$ .

Como  $\text{tr}(\text{ad } y) = \beta$  concluimos que  $\beta = 0$ . De igual forma, si consideramos la matriz para  $\text{ad } z$  concluimos que  $\alpha = 0$ , entonces  $[y, z] = 0$ .

(b)  $L'$  está generada por  $\{[x, y], [x, z], [y, z]\}$ . Como  $[y, z] = 0$  deducimos que  $\{[x, y], [x, z]\}$  es una base de  $L'$ . Entonces, la imagen de  $\text{ad } x$  tiene dimensión 2, por lo tanto  $\text{ad } x : L' \rightarrow L'$  es un isomorfismo.  $\square$

**Caso 1:** Existe  $x \notin L'$  tal que  $\text{ad } x : L' \rightarrow L'$  es diagonalizable.

Podemos asumir que  $y, z$  son vectores propios de  $\text{ad } x$ , por (b) los valores propios asociados deben ser no nulos. Supongamos  $[x, y] = \lambda y$ . Podemos asumir que  $\lambda = 1$ , si reescalamos  $x$  por  $\lambda^{-1}$ , tenemos que  $[\lambda^{-1}x, y] = y$ . Con respecto a la base  $\{y, z\}$  de  $L'$  el mapa lineal  $\text{ad } x : L' \rightarrow L'$  tiene matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} : \mu \in \mathbb{C} \text{ no nulo.}$$

**Ejercicio 3:** Sean  $V$  espacio vectorial y  $\varphi$  un endomorfismo de  $V$ . Sea  $L = V \oplus \text{span}\{x\}$ . Probar que si definimos en  $L$  el corchete  $[y, z] = 0$  para todos  $y, z \in V$ ,  $[x, y] = \varphi(y)$  para todo  $y \in V$ ,

entonces  $L$  es un álgebra de Lie y  $\dim L' = \text{rango}(\varphi)$ .

Llamemos  $L_\mu$  a esta álgebra de Lie. Probar que  $L_\mu$  es isomorfa a  $L_\nu$  si y sólo si  $\mu = \nu$  o  $\mu = \nu^{-1}$ .

Entonces hay infinitas de estas álgebras de Lie no isomorfas.

**Caso 2:** Para todo  $x \notin L'$  el mapa  $\text{ad } x : L' \rightarrow L'$  no es diagonalizable.

Tomemos  $x \notin L'$ . Como estamos trabajando sobre los complejos,  $\text{ad } x : L' \rightarrow L'$  debe tener un vector propio, llamémoslo  $y \in L'$ . Como antes, podemos renormalizar  $x$  y asumir que  $[x, y] = y$ , extendemos  $y$  a una base  $\{y, z\}$  base de  $L'$ . Tenemos que  $[x, z] = \lambda y + \mu z$ , con  $\lambda \neq 0$  (de lo contrario  $\text{ad } x$  sería diagonalizable). Reescalando  $z$  podemos suponer  $\lambda = 1$ . Entonces la matriz asociada a  $\text{ad } x : L' \rightarrow L'$  tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Como  $A$  no es diagonalizable no puede tener dos valores propios diferentes, entonces  $\mu = 1$ .

Nuevamente, esto determina completamente el álgebra de Lie con las propiedades requeridas. A menos de isomorfismo tenemos una sola de estas álgebras.

- $L' = L$ .

Supongamos que  $L$  es un álgebra de Lie compleja de dimensión 3 tal que  $L = L'$ . Veamos que a menos de isomorfismo  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  es la única álgebra de Lie con esta propiedad.

**Ejercicio 4:**  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})'$ .

**Paso 1:** Sea  $x \in L$  no nulo entonces  $\text{ad } x$  tiene rango 2.

Extendamos  $x$  a una base de  $L$ ,  $\{x, y, z\}$ . Entonces  $L'$  está generado por  $\{[x, y], [x, z], [y, z]\}$ , como  $L = L'$  este conjunto es LI. Por lo cual la imagen de  $\text{ad } x$  tiene por base  $\{[x, y], [x, z]\}$ .

**Paso 2:** Existe  $h \in L$ :  $\text{ad } h : L \rightarrow L$  tiene un vector propio con valor propio no nulo.

Consideremos  $x \in L$  no nulo, si  $\text{ad } x$  tiene un valor propio no nulo podemos tomar  $h = x$ . Si  $\text{ad } x : L \rightarrow L$  no tiene valores propios no nulos, como tiene rango 2, su forma de Jordan es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces, existe una base de  $L$  extendiendo  $x$ ,  $\{x, y, z\}$ , tal que  $[x, y] = x$ ,  $[x, z] = y$ . Por lo tanto  $\text{ad } x$  tiene a  $x$  como vector propio asociado a  $-1$ . Entonces podemos tomar  $h = y$ .

**Paso 3:** Por los pasos anteriores podemos encontrar  $h, x \in L$  tales que  $[h, x] = \alpha x \neq 0$ . Como  $h \in L = L'$  sabemos que  $\text{ad } h$  tiene traza nula. Entonces  $\text{ad } h$  puede tener tres valores propios distintos,  $-\alpha$ ,  $0$  y  $\alpha$ . Si  $y$  es vector propio asociado a  $-\alpha$ , entonces  $\{h, x, y\}$  es base de  $L$ . En esta base  $\text{ad } h$  se representa por una matriz diagonal.

**Paso 4:** Para completar la descripción del álgebra de Lie  $L$  necesitamos determinar  $[x, y]$ .

$$[h, [x, y]] = [[h, x], y] + [x, [h, y]] = \alpha[x, y] - \alpha[x, y] = 0.$$

Tenemos dos aplicaciones del paso 1. Primero,  $N(\text{ad } h) = \text{span}\{h\}$ , entonces  $[x, y] = \lambda h$  para algún  $\lambda \in \mathbb{k}$ . Segundo,  $\lambda \neq 0$  porque de lo contrario  $N(\text{ad } h)$  tendría dimensión 2. Normalizando  $x$  por  $\lambda^{-1}x$  podemos suponer  $\lambda = 1$ .

Si sustituimos  $h$  por un múltiplo no nulo podemos tomar cualquier valor de  $\alpha$  como queremos. En particular si tomamos  $\alpha = 2$  la estructura constante de  $L$  que respeta la base  $\{x, y, h\}$  coincide

con la estructura constante de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  respecto la base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Entonces  $L \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . Por lo tanto, hay una única álgebra de Lie de dimensión tres que coincide con su álgebra derivada.

### 3. APLICACIONES A LA ECONOMÍA Y FINANZAS

Veamos un breve recorrido por alguno de los problemas y tópicos más significativos en economía y finanzas empleando la teoría de Lie.

En los trabajos de Lo y Hui:

- *Valuation of financial derivatives with time-dependent parameters: Lie-algebraic approach*. 2001.
  - *Pricing multi-asset financial derivatives with time-dependent parameters—Lie algebraic approach*. 2002.
  - *Lie-algebraic approach for pricing moving barrier options with time-dependent parameters*. 2006.
- Se estudió la valoración de derivados multiactivos introduciendo diversas técnicas basadas en álgebras de Lie. Previamente, Lo y Hui ya habían empleado la teoría de Lie para estudiar ecuaciones en derivadas parciales con coeficientes que dependen del tiempo, modelos CEV (elasticidad constante de varianza) y opciones con barrera.

Independientemente, empleando igualmente las álgebras de Lie, Björk y Landén en el trabajo *On the construction of finite dimensional realizations for nonlinear forward rate models*, 2002, estudiaron problemas financieros correspondientes a la toma de decisiones bajo riesgo por parte de los agentes en el marco de la teoría de las funciones de utilidad. Para este estudio se emplearon los grupos de Lie nilpotentes.

Basov, en el trabajo *Lie Groups of Partial Differential Equations and Their Application to the Multidimensional Screening Problems*, 2004, describió algunos métodos, basados en las propiedades de los grupos de Lie, para resolver el problema de cribado multidimensional.

Gaspar, en el trabajo *Finite dimensional Markovian realizations for forward price term structure models*, 2006, obtuvo un modelo general para la estructura de los precios a plazos basándose en la metodología dada por Björk y aplicando las álgebras de Lie.

#### 3.1. Algunas nociones de economía y finanzas.

Se denomina *derivado financiero* a cualquier producto financiero cuyo valor está basado en el precio que posee un determinado activo. Consisten en operaciones hipotéticas cuya liquidación se realiza mediante la diferencia existente entre el precio de mercado del activo y el precio pactado en la operación hipotética.

Los derivados financieros tienen como función eliminar o reducir las consecuencias adversas producidas por cambios desfavorables en el activo sobre el que se define el derivado (es decir, eliminar el riesgo en las operaciones financieras). Además se emplean como un producto financiero basado en la especulación con los precios del activo.

Los *derivados financieros multiactivos*, consisten en productos financieros cuyo valor se basa en el precio que poseen varios activos (y no solamente uno).

Uno de los derivados financieros se denomina *opción*, que es el derecho a comprar o vender un activo en el futuro a un precio pactado. Debe tenerse en cuenta que, al comprar una opción, el

comprador paga una prima por disfrutar del derecho adquirido, mientras que el vendedor cobra dicha prima. Por tanto, se realiza una transacción en el instante de la contratación de la opción.

Existen dos tipos de opciones estándar: las opciones de *estilo americano* y las de *estilo europeo*. Las primeras son aquellas en las que es posible ejercer derecho de compra-venta en cualquier momento anterior a la fecha de vencimiento del contrato; mientras que en las segundas sólo se puede ejercer dicho derecho en la fecha de vencimiento. Cualquier otro tipo de opción se denomina *exótica*. Un caso particular de opciones exóticas son las opciones con barreras. Se denomina *opción con barrera* a toda opción cuya cancelación o activación depende del valor alcanzado durante un período de tiempo determinado por el precio del activo subyacente. Este valor será independiente del valor del activo en la fecha de vencimiento de la opción. Es decir, la activación o cancelación de la opción depende de que el precio del activo alcance unos determinados valores umbrales (de ahí la denominación de opciones con barrera).

Principales tipos y subtipos de opciones de barrera:

- (1) Opciones con barrera *de entrada* (knock-in): la opción pasa a activarse y a ser estándar si el precio del activo subyacente alcanza el valor fijado en la barrera durante el período acordado.
  - (a) Opciones *abajo y de entrada* (down-in): la barrera se fija por debajo del precio inicial del activo, activándose la opción cuando el precio llega a ser inferior a la barrera.
  - (b) Opciones *arriba y de entrada* (up-in): la barrera se fija por encima del precio inicial del activo, activándose la opción cuando el precio es superior a la barrera.
- (2) Opciones con barrera *de salida* (knock-out): la opción deja de existir o expira sin valor cuando se alcanza el valor fijado en la barrera para el precio del activo.
  - (a) Opciones *abajo y de salida* (down-out): la barrera se fija por debajo del precio inicial del activo, expirando la opción cuando el precio llega a ser inferior a la barrera.
  - (b) Opciones *arriba y de salida* (up-out): la barrera se fija por encima del precio inicial del activo, expirando la opción cuando el precio llega a ser superior a la barrera.

Las opciones con barrera pueden contratarse de tal modo que la barrera sea doble (es decir, que sea arriba y abajo a la vez) e incluso puede establecerse una barrera móvil, que vaya ajustándose durante toda la vida de la opción hasta alcanzar la fecha de vencimiento.

Cualquier producto financiero presenta la problemática de la fijación de precios. En la fijación de precios, la empresa debe considerar tanto las necesidades del mercado hacia el producto ofertado como el proceso productivo. Para obtener el máximo beneficio posible, se debe buscar el equilibrio entre elegir un precio competitivo y un precio que permita unos márgenes más amplios de ganancia.

A la hora de determinar los precios de un producto financiero, suele considerarse el modelo CEV. Este modelo, introducido por Cox (1975), extiende el de Black-Scholes para la fijación de precios e introduce la posibilidad de considerar una volatilidad estocástica. En el modelo CEV, se supone que el precio  $S(t)$  del activo sigue el siguiente proceso de difusión en función del tiempo  $t$ :

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)^{\beta/2}dZ(t)$$

donde  $\mu(t)$  indica la tasa de crecimiento,  $\sigma(t)$  es el parámetro de volatilidad,  $\beta$  parámetro de elasticidad de la función de volatilidad local y  $Z(t)$  es un proceso de Wiener (un proceso de Wiener es un proceso estocástico dependiendo continuamente del tiempo. El ejemplo más conocido de proceso de Wiener es el movimiento Browniano).

El concepto de volatilidad es usado en Finanzas para medir el riesgo de un derivado financiero en un determinado período de tiempo. Más concretamente, la volatilidad mide la desviación estándar que presentan los cambios de valor de un determinado derivado financiero en un horizonte temporal específico.

**Definition 21.** Una función de producción  $Y = f(K, L)$  se dice neoclásica si es homogénea de grado 1 (rendimiento a escala constante) y disminuye suavemente respecto de los factores individuales.  $Y = f(K, L)$  se dice que disminuye suavemente respecto a un factor individual si al aumentar uno de los factores de la producción, permaneciendo los demás constantes, las ganancias globales decrecen relativamente a partir de un cierto punto.

Consideramos una economía en la que  $K$  y  $L$  representan el capital y la mano de obra, respectivamente. Dicha economía se representa mediante una función de producción neoclásica  $Y = f(K, L)$ , que es continuamente diferenciable. La función de producción anterior no siempre se mantiene constante, sino que sufre modificaciones a lo largo del tiempo. Dichas modificaciones pueden deberse bien a variaciones en el capital o bien a mejoras en la investigación. Los conceptos empleados en economía para representar estos cambios son el de *cambio técnico* y el más restrictivo de *progreso técnico*.

Por *cambio técnico* entendemos cualquier cambio en la función de producción que altera la relación entre consumos y producciones. El cambio técnico se denomina *progreso técnico* si la producción aumenta para cualquier consumo, con respecto al obtenido antes del cambio. Al introducirse un cambio técnico en una economía, la función de producción se supone que no varía, pero sí lo hacen los niveles de producción. Por tanto, la función de producción tras el cambio técnico pasará a expresarse como  $\bar{Y} = \bar{f}(K, L, t)$ , donde  $t$  es el parámetro de progreso técnico e  $\bar{Y}$  es la producción para el capital y la mano de obra tras el proceso técnico.

### 3.2. Teoría de Lie y fijación de precios para opciones con barrera móvil y con parámetros temporales.

En esta sección desarrollaremos parcialmente el trabajo de Lo y Hui, *Lie-algebraic approach for pricing moving barrier options with time-dependent parameters*. Este trabajo se basa en el Teorema de Wei-Norman (*Lie algebraic solution of linear Differential Equations*, 1963), que nunca se había aplicado al campo de las Finanzas. Lo y Hui ajustan y aplican este modelo basado en las álgebras de Lie al problema de la evaluación de las opciones con barrera móvil y con parámetros dependientes del tiempo. Para realizar dicha evaluación, supusieron que el valor del activo subyacente sigue el siguiente proceso de difusión CEV:

$$(1) \quad dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)^{\beta/2}dZ(t), \quad 0 \leq \beta < 0.$$

Donde  $\mu(t)$  es la media del precio de las acciones en el instante  $t$ ,  $\sigma(t)S(t)^{\beta/2}$  es la varianza instantánea de dicho precio,  $dZ(t)$  es un proceso de Wiener y  $\beta$  es el factor de elasticidad.

Partiendo de la ecuación (1), la varianza instantánea del cambio porcentual en el precio se define como  $\sigma(t)^2/S(t)^{2-\beta}$ .

**Teorema de Wei-Norman.** Considerar la ecuación diferencial de primer orden de operadores lineales

$$(2) \quad \frac{dU(t)}{dt} = H(t)U(t), \quad U(0) = 1.$$

Donde  $H$  y  $U$  son operadores lineales dependientes del tiempo en un espacio de Banach o uno de dimensión finita. De acuerdo al Teorema de Wei-Norman si el operador  $H$  puede expresarse como

$$(3) \quad H(t) = \sum_{n=1}^N a_n(t)L_n,$$

donde  $a_n$  son funciones escalares dependientes del tiempo y  $L_n$  son generadores de un álgebra de Lie resoluble de dimensión  $N$  o generadores del álgebra de Lie simple real split. Entonces, el

operador  $U$  se expresa como:

$$(4) \quad U(t) = \prod_{n=1}^N \exp[g_n(t)L_n].$$

Siendo  $g_n$  funciones escalares dependientes de la variable  $t$ . Para hallar estas funciones simplemente sustituimos las ecuaciones (3) y (4) en (2) y comparamos los dos lados de la igualdad, obteniendo las siguientes ecuaciones diferenciales no lineales:

$$(5) \quad \frac{dg_n(t)}{dt} = \sum_{m=1}^N \eta_{nm} a_m(t), \quad g_n(0) = 0,$$

donde  $\eta_{nm}$  son funciones no lineales de las  $g_n$ . Entonces, transformamos la ecuación diferencial lineal (2) en un sistema de ecuaciones no lineales acopladas de funciones escalares (5).

Consideremos el siguiente ejemplo para ilustrar esto: los generadores  $L_n$  forman el álgebra de Lie de Heisenberg-Weyl definida por las relaciones del corchete

$$(6) \quad [L_1, L_2] = L_3, [L_1, L_3] = [L_2, L_3] = 0$$

entonces,  $H$  está dada por

$$(7) \quad H(t) = a_1(t)J_1 + a_2(t)L_2 + a_3(t)L_3.$$

Por el teorema de Wei-Norman  $U(t)$  se expresa como

$$(8) \quad U(t) = \text{ext}(g_1(t)L_1) \text{ext}(g_2(t)L_2) \text{ext}(g_3(t)L_3),$$

derivando

$$(9) \quad \frac{dU(t)}{dt} U(t)^{-1} = \frac{dg_1(t)}{dt} L_1 + \frac{dg_2(t)}{dt} L_2 + \left[ \frac{dg_3(t)}{dt} + g_1(t) \frac{dg_2(t)}{dt} \right] L_3$$

Comparando (7) y (9) obtenemos que:

$$\frac{dg_1(t)}{dt} = a_1(t), \quad \frac{dg_2(t)}{dt} = a_2(t), \quad \frac{dg_3(t)}{dt} + g_1(t) \frac{dg_2(t)}{dt} = a_3.$$

Entonces

$$g_1(t) = \int_0^t a_1(\tau) d\tau, \quad g_2(t) = \int_0^t a_2(\tau) d\tau, \\ g_3(t) = \int_0^t [a_3(\tau) - a_2(\tau)g_1(\tau)] d\tau.$$

Lo cual termina de determinar  $U$ .

**CEV Opción europea.** El modelo CEV con parámetros dependientes del tiempo para opciones europeas estándar se describe por la ecuación diferencial parcial

$$(10) \quad \frac{\partial P(S, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma(\tau)^2 S^\beta \frac{\partial^2 P(S, \tau)}{\partial S^2} + [r(\tau) - d(\tau)] S \frac{\partial P(S, \tau)}{\partial S} - r(\tau) P(S, \tau),$$

para  $0 \leq \beta < 0$ . En esta ecuación,  $P$  es el valor de la opción,  $S$  es el precio del activo subyacente,  $\tau$  es el tiempo al vencimiento,  $\sigma$  es la volatilidad,  $r$  es la tasa de interés libre de riesgo y  $d$  son los dividendos generados. La ecuación (10) puede reescribirse como sigue, mediante el cambio de variable  $x = \sqrt{S^{2-\beta}}$ :

$$(11) \quad \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{8} \tilde{\sigma}(\tau)^2 \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left[ \tilde{\mu}(\tau)x - \frac{(4-\beta)\tilde{\sigma}(\tau)^2}{4(2-\beta)x} \right] \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + \left[ \frac{(4-\beta)\tilde{\sigma}(\tau)^2}{8(2-\beta)x} - r(\tau) \right] u(x, \tau) \equiv H(\tau)u(x, \tau),$$

siendo  $\tilde{\sigma}(\tau) = (2 - \beta)\sigma(\tau)$ ,  $\tilde{\mu}(\tau) = (2 - \beta)[r(\tau) - d(\tau)]$  y  $u(x, \tau) = xP(S, \tau)$ .

Esta nueva forma de expresar (10) les permitió dar a Lo y Hui una expresión del operador  $H$

$$(12) \quad H(t) = a_1(t)K_+ + a_2(t)K_0 + a_3(t)K_- + b(t),$$

donde

$$\begin{aligned} K_- &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{4 - \beta}{(2 - \beta)x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{4 - \beta}{(2 - \beta)x^2} \right], \\ K_0 &= \frac{1}{2} \left( x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2 - \beta} \right), \quad K_+ = \frac{1}{2} x^2, \\ a_3(t) &= \frac{1}{4} \tilde{\sigma}(t)^2, \quad a_2(t) = \tilde{\mu}(t), \quad a_1(t) = 0, \\ b(t) &= \frac{1 - \beta}{2(\beta - 2)} \tilde{\mu}(t) - r(t). \end{aligned}$$

Los operadores  $K_+$ ,  $K_0$  y  $K_-$  son los generadores del álgebra de Lie  $su(1, 1)$ :

$$\begin{aligned} [K_+, K_-] &= -2K_0, \\ [K_0, K_{\pm}] &= \pm K_{\pm}. \end{aligned}$$

Podemos definir el operador evolución  $U(t, 0)$  tal que

$$(13) \quad u(x, t) = \exp \left[ \int_0^t b(\tau) d\tau \right] U(t, 0) u(x, 0).$$

Sustituyendo esta ecuación en (11) obtenemos la ecuación de evolución

$$(14) \quad \frac{\partial U(t, 0)}{\partial t} = H_I(t) U(t, 0), \quad U(0, 0) = 1,$$

donde  $H_I(t) = a_1(t)K_+ + a_2(t)K_0 + a_3(t)K_-$ .

Como  $su(1, 1)$  es un álgebra de Lie real de dimensión 3 simple split, el teorema de Wei-Norman dice que

$$(15) \quad U(t, 0) = \exp[c_1(t)K_+] \exp[c_2(t)K_0] \exp[c_3(t)K_-],$$

donde los coeficientes  $c_i(t)$  están dados por

$$c_1(t) = 0, \quad c_2(t) = \int_0^t \tilde{\mu}(\tau) d\tau$$

y

$$c_3(t) = \frac{1}{4} \int_0^t \tilde{\sigma}(\tau)^2 \exp[c_2(\tau)] d\tau.$$

Entonces, tenemos como hallar el operador de evolución  $U(t, 0)$  que permite determinar  $u(x, t)$  solución de (11).